

tanulmányok **94 / 1979**

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

EGY STATISZTIKUS SZŰRÉSI ELJÁRÁS SZÁMÍTÓGÉPES
FOLYAMATIRÁNYÍTÁSÁHOZ

GERTLER JÁNOS

Doktori értekezés

Tanulmányok 94/1979.

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 084 X

ISSN 0324-2951

Készült a KSH Nemzetközi Számítástechnikai Oktató és Tájékoztató
Központ Reprográfiai Üzemében
7220-213

TARTALOM

1. BEVEZETÉS	7
2. LINEÁRIS SZÜRÉSI ALGORITMUSOK	10
2.1. Bevezetés	10
2.2. Szűrési algoritmusok tulajdonságai	12
2.3. Szűrés és identifikáció	15
2.4. Néhány ismert szűrési algoritmus	15
2.4.1. Statikus LN szűrő	16
2.4.2. Statikus MV szűrő	20
2.4.3. Statikus anyagmérleg	22
2.4.4. Kalman-szűrő	27
3. AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT DINAMIKUS ANYAGMÉRLEG MINT STATISZTIKUS SZÜRŐ	32
3.1. Bevezetés	32
3.2. A tervezés alapfeltételei	34
3.3. A szűrő alapegyenletei	37
3.4. A szűrő további tulajdonságai	39
3.5. Általános lineáris struktúra	43
3.6. Elemi rendszer	44
4. AZ OPTIMÁLIS SZÜRŐ-MÁTRIX	47
4.1. Bevezetés	47
4.2. Összefüggés az MV és LN jósági index között	47
4.3. A jósági index értékének analitikus meghatározása	49
4.4. Az optimális szűrő-mátrix meghatározása	51
4.5. Szuboptimális szűrő-mátrix	54
4.6. Triviális szűrő	58
4.7. Szűrés nélküli eset	58
4.8. A jósági index alsó korlátja	58
4.9. Határérték-tulajdonságok	60
4.10. Elemi rendszer	62
5. A SZÜRŐ STABILITÁSA	66
5.1. Bevezetés	66
5.2. Összefüggés a jósági index és a stabilitás között	67
5.2.1. Elsőrendű szűrő	69

5.2.2. Másodrendű szűrő	69
5.3. Stabilitási tartomány a szűrő-paraméterek terében	72
5.3.1. Elsőrendű rendszer	72
5.3.2. Másodrendű rendszer	73
5.4. A triviális, szuboptimális és optimális szűrő stabilitása	75
5.4.1. A triviális szűrő stabilitása	75
5.4.2. A szuboptimális szűrő stabilitása	77
5.4.3. Az optimális szűrő stabilitása	78
6. A SZÜRŐ ÉRZÉKENYSÉGE	81
6.1. Bevezetés	81
6.2. Lineáris érzékenységi függvények	81
6.3. A becslések szerinti érzékenység az optimum helyén	83
6.4. Részletes érzékenységi vizsgálatok	85
6.4.1. A folyamat-paraméterek becslési hibájának hatása	87
6.4.2. A zaj kovariancia-mátrix becslési hibájának hatása	88
6.4.3. A zaj zérustól különböző várható értékének hatása	89
6.4.4. A zaj időbeli korreláltságának hatása	91
6.5. Folytonos rendszerek diszkrét leírása: a közelítési hiba hatása	92
6.6. Elemi rendszer	95
6.6.1. A folyamat-paraméterek becslése szerinti érzékenység	95
6.6.2. A zaj várható értéke szerinti érzékenység	96
6.6.3. A zaj korreláltsága szerinti érzékenység	98
6.6.4. A bemenő-jel közelítési hibájának hatása	99
7. HOLTIDŐS FOLYAMATOK	101
7.1. Bevezetés	101
7.2. A szűrő viselkedése holtidős rendszer esetén	103
7.3. Holtidő-transzformáció	104
8. MÉRETLEN VÁLTOZÓK	108
8.1. Bevezetés	108
8.2. Általános összefüggések	108

8.3. Stochasztikus méretlen bemenő-jelek	111
8.4. Determinisztikus méretlen változók	112
9. SZÁMITÁSI EREDMÉNYEK	117
9.1. Bevezetés	117
9.2. Numerikus program	118
9.3. Szimulációs program	120
9.4. Alapvizsgálatok mintarendszereken	124
9.4.1. Elsőrendű mintarendszer	124
9.4.2. Harmadrendű mintarendszerek	131
9.5. Stabilitási vizsgálat	135
9.6. Érzékenységi vizsgálatok	145
9.6.1. A folyamat-paraméterek becslési hibájának hatása	146
9.6.2. A zaj kovariancia-mátrix becslési hibájának hatása	149
9.6.3. A zaj zérustól különböző várható értékének hatása	153
9.6.4. A zaj időbeli korreláltságának hatása	156
9.6.5. A folytonos rendszer bemenő-jele közelítésének hatása	156
9.7. Vizsgálatok rendszerzajjal	161
9.8. Motor-generátor egység	161
9.9. Desztillációs oszlop	170
9.10. Ammónia-szintézis reaktor	176
FÜGGELÉK	
1. Függelék: Folytonos-diszkrét lineáris rendszerek leírása	187
2. Függelék: Véletlen jelek néhány tulajdonsága	191
3. Függelék: Mátrix-deriváltak	194
4. Függelék: Skalárértékű mátrixszorzatok deriváltjai	196
5. Függelék: Egy mátrix-polinomokra vonatkozó azonosság	199
6. Függelék: Mátrixok nyomára vonatkozó néhány összefüggés	201
7. Függelék: Egy-bemenet egy-kimenetű lineáris folytonos-diszkrét rendszer kimeneti autokorrelációs sorozatának számítása időtartományban korrelálatlan véletlen bemenőjel esetén	204
8. Függelék: Több-bemenet több-kimenetű lineáris folytonos-diszkrét rendszerek kimeneti autokorrelációjának számítása	208

9. Függelék: Egy feltételes szélsőérték probléma (szuboptimális szűrő)	212
10. Függelék: A folytonos-diszkrét leírás határérték- tulajdonságai	215
11. Függelék: Az η_1 és Γ_1' mennyiségek kiszámítása	218
12. Függelék: A Bairstow-módszer és kiterjesztése	220
13. Függelék: A Powell-féle optimum-kereső algoritmus	221
IRODALOMJEGYZÉK	222

1. BEVEZETÉS

A korszerű irányításelmélet eredményei közül leginkább a statisztikus módszerek azok, amelyeket ipari folyamatirányító rendszerekben alkalmaznak, vagy legalábbis amelyeknek ilyen alkalmazásai várhatók. E módszerek a statisztikus szűrés, statisztikus identifikáció illetve stochasztikus szabályozás területeit ölelik fel. Ebben a dolgozatban a statisztikus szűrés egy algoritmusával foglalkozom.

A statisztikus szűrés területén 1960-61 óta a Kalman-szűrő és annak különböző továbbfejlesztett változatai képviselik a szinte egyeduralkodó irányzatot. A Kalman-szűrőt kiterjedten és igen jó eredményekkel alkalmazzák a repülőgép- és rakéta-irányító rendszerekben. Használata ipari folyamatirányításban is lehetséges, elsősorban ha a szűrő állapotváltozós szabályozó számára szolgáltat bemenő információt. Ha viszont a folyamat megfigyelésének célja a kezelő tájékoztatása illetve adatgyűjtés műszaki-gazdasági számításokhoz, akkor hátrányos lehet a Kalman-szűrőnek az a tulajdonsága, hogy a bemenő-jelekre nézve nem ad becslést.

Ennek a dolgozatnak a tárgya egy olyan szűrési eljárás, amely a megfigyelt folyamat ki- és bemenő-jeleit becsüli – mégpedig úgy, hogy a becslések kielégítik a folyamat bemenet-kimeneti egyenleteit. A módszer lényegében a vegyészmérnöki gyakorlatban általánosan alkalmazott anyagmérleg-algoritmus dinamikus kiterjesztése és általánosítása.

A dolgozatban először definiálom a fentiek szerint származtatott bemenet-kimeneti szűrőt, majd megvizsgálom az algoritmust mint diszkrét dinamikus rendszert. Ezután megmutatom, hogy az anyagmérleg-struktúra éppen az a megszorítás az általános lineáris szűrőhöz képest, amely biztosítja a becslések torzítatlanságát.

A továbbiakban behatóan tárgyalom az optimális szűrő tulajdonságait és meghatározásának módját. Formulát adok a szűrő működését jellemző és az optimalizálás célfüggvé-

nyeként szereplő jósági index kiszámítására, majd megfogalmazom az optimum meghatározására szolgáló numerikus kereső algoritmust. Bevezetek és részletesen elemzek egy szuboptimális megoldást, amely - amellett, hogy általában az optimum jó közelítése - több érdekes elméleti következtetéshez is vezet.

Foglalkozom a szűrő két, a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából lényeges tulajdonságával: annak stabilitásával és érzékenységeivel. Végül bemutatom az eljárás két kiterjesztését, egyrészt holtidős rendszerekre, másrészt méretlen változókat is tartalmazó folyamatokra, beleértve a rendszerzajos folyamatokat is.

Az elméleti eredményeket bőséges számítógépes vizsgálati anyag támasztja alá és szemlélteti. E számítások részben numerikus algoritmusokkal, részben szimulációval készültek és mesterséges mintarendszerek mellett valóságos folyamatok modelljeire is kiterjednek.

A statisztikus szűrési eljárások folyamatirányítási alkalmazásának általános nehézsége, hogy azok igénylik a folyamat és a zaj tulajdonságainak viszonylag pontos ismeretét. Ez alól a dolgozatban javasolt módszer sem kivétel. Az elvégzett részletes érzékenységi vizsgálatok viszont lehetővé teszik az esetleges pontatlanságok hatásának minőségi és mennyiségi értékelését.

*

A statikus anyagmérleg-algoritmus dinamikus kiterjesztésének gondolata Almásy Gedeon barátommal folytatott beszélgetéseinkben merült fel. Az ezt követő közös munkánkból két publikáció született 1971-ben és 73-ban (IFAC/IFIP DISCOP Szimpózium illetve IFAC Journal Automatica). Saját érdeklődésem ezután - főként 1975-től - az általánosított dinamikus algoritmus mint statisztikus szűrő irányába fordult, s az ezzel kapcsolatos több éves tevékenység vezetett el végül a jelen dolgozathoz.

Almásy kutatásai a továbbiakban az (alapvetően statikus) anyagmérleg-számítások továbbfejlesztésére irányultak; eredményeit - a jelen munkával párhuzamosan - szintén doktori értekezésben foglalja össze.

Munkám jelentősebb közbenső eredményeiről az 1975-ös Boston-i, majd az 1978-as Helsink-i IFAC Kongresszuson, valamint az IFAC Journal Automatica-ban 1979-ben megjelenő publikációban számoltam be. 1977-es tanulmányutam során lehetőségem volt a módszert szemináriumokon ismertetni több észak-amerikai egyetemen (Case Western Reserve University, Cleveland; University of Minnesota, Minneapolis; Purdue University, Lafayette; University of Illinois, Urbana; Rutgers University, New Brunswick; McMaster University, Hamilton).

Az amerikai látogatások és szemináriumok arra is alkalmat adtak, hogy az eljárásról konzultáljak a terület néhány kiváló szakértőjével, mint G. Blankenship, I. Lefkowitz (Case), P. Kumar (Minnesota), P.V. Kokotovic (Illinois) és P. K. Sinha (McMaster) professzorok. Emellett igen hasznosak voltak azok a beszélgetések is, amelyeket Rózsa Pál professzorral illetve Krámlí András kollégámmal folytattunk.

Végül hadd mondjak itt köszönetet azoknak, akik e munka közvetlen részesei voltak. A jósági index számító és optimum-kereső algoritmus numerikus-gépi realizációját Varga Gyula kollégám készítette Abaffy József közreműködésével. A szimulációs programok Sipos Ferenc kollégám munkája voltak. A számítógépes vizsgálatokban emellett felhasználtam Cleveland-i diákom Raghuvansh Prasad Singh valamint aspiránsom Pavel Simko néhány eredményét is.

A dolgozat szerkesztését és gépelését Fazekas Istvánné végezte, az ábrákat Schmidt Jánosné rajzolta. Munkájuk eredménye - úgy vélem - önmagáért beszél.

2. LINEÁRIS SZÜRÉSI ALGORITMUSOK

2.1. Bevezetés

Fizikai rendszerekben a méréseket elkerülhetetlenül zajok torzítják. Akár szabályozás, akár csupán a kezelő tájékoztatása a mérések célja, általában arra törekszünk, hogy a zajos mérésekből rekonstruáljuk a valódi változókat. Ezt a tevékenységet szűrésnek nevezzük. Természetesen a valódi változók tökéletes rekonstrukciója általában nem lehetséges, a jó szűrőtől azonban elvárjuk, hogy a szűrt értékek sokkal jobban megközelítsék a valódiakat, mint a szűrés alapjául szolgáló mérések.

A szűrési probléma egyik szokásos megközelítése azt feltételezi, hogy a hasznos jelek és az azokat torzító zajok egymástól jól elkülöníthető frekvencia-tartományokkal jellemezhetők. Ilyen körülmények között a szűrési feladat úgy fogalmazható meg, hogy a mérések zaj-frekvenciás összetevőit minimális mértékűre kell korlátozni a jel-frekvenciás összetevők számottevő befolyásolása nélkül. A frekvencia-szűrésnek számos jól ismert eszköze van, amelyek egyaránt lehetnek készülékek (áramkörök) vagy számítógépen realizált algoritmusok.

A másik lehetséges megközelítés a zajokat véletlen időfüggvényeknek tekinti. A szűrő most egy algoritmus, amely a mérésekből a valódi változók egy becslését állítja elő. Eltekintve a legegyszerűbb szűrőktől, ezek az algoritmusok felhasználják a rendszerre és zajokra vonatkozó - valódi vagy feltételezett - ismereteket is, és tervezésük úgy történik, hogy a becslések optimalizáljanak egy ún. jósági indexet. Ilyen algoritmusok realizációja általában digitális számítógépet igényel. Ebben a munkában kizárólag ilyen összetett statisztikus szűréssel fogunk foglalkozni.

Bár a szűrési probléma statisztikus megközelítését kifejezetten modern irányzatnak tekinti a köztudat, az első ezzel

kapcsolatos eredmények még a 19.század elejéről valók és Gauss nevéhez fűződnek [D1]. A ma általában klasszikusként ismert iskola századunk 30-40-es éveiben alakult ki, elsősorban Kolmogorov [D2,D3], Kreis [D5,D6] és Wiener [D7] munkássága nyomán.

A statisztikus szűrés modern korszaka kétségkívül Kalman [D12] illetve Kalman és Bucy [D13] alapvető cikkével indult 1960-61-ben, bár a Kalman-szűrőnek számos közvetlen előzménye is megtalálható az irodalomban [D4,D8,D9,D10,D11,D14]. Azóta, és különösen 1970 táján, a statisztikus szűrés az irányítás-elméleti irodalom egyik legdivatosabb témájává vált. Kailath egy 1974-ben megjelent kitűnő összefoglaló cikke [D15] 390 irodalmi hivatkozást sorol fel, de megemlíti, hogy a témával foglalkozó publikációk száma már több ezerre tehető. (Ebben a hatalmas számban az is közrejátszik, hogy a 60-as évek második felének úrkutatási lázában az USA-ban lényegében számolatlanul adták a pénzt irányításelméleti kutatásokra.) Az említett publikációk általában a Kalman-szűrő valamilyen - speciális követelményeket feltételező és kielégítő - továbbfejlesztésével illetve tulajdonságainak elemzésével foglalkoznak. Bár a nagyszámu munka között sok van, amelyiknek a gyakorlati értéke erősen kérdéses, kétségtelen tény, hogy a Kalman-szűrőt ma már több területen - elsősorban a rakéta- és repülőgép-irányításban - rutinszerűen használják.

Ennek a rendkívül kiterjedt irodalomnak a kritikai feldolgozására a jelen munka keretében természetesen nem vállalkozhatunk. Az irodalomjegyzékben néhány jelentősebb publikációt felsorolunk [E1 - E19] és általában utalunk a fentiekben már idézett összefoglaló cikkekre [D15]. A témában számos tankönyv-jellegű mű is megjelent: ezek közül kiemeljük Luenberger [A7], Sage és Melsa [A10] valamint Jazwinsky [A8] munkáját.

E fejezet további részeiben felsoroljuk azokat a szem-

pontokat és tulajdonságokat, amelyek egy statisztikus szűrési algoritmus jellegét, működését és használhatóságát meghatározzák. Kitérünk a szűrés és identifikáció bizonyos kapcsolataira. Ezután - részben a fent hivatkozott könyvek alapján - bemutatjuk a szűrési algoritmusok néhány alaptípusát. Ezek logikusan elvezetnek az értekezés fő témáját képező új szűrési algoritmushoz. Ugyanakkor ezeken keresztül szemléltetni fogjuk azt a matematikai technikát is, amelyet az értekezés további részeiben majd alkalmazunk.

2.2. Szűrési algoritmusok tulajdonságai

Amint azt már az előző alfejezetben mondtuk, a statisztikus szűrő olyan algoritmus, amely valamely folyamatváltozó valódi értékét becsüli statisztikus zajjal terhelt mérések alapján. Ezt a definíciót most annyiban pontosítjuk, hogy szűrés esetén a változók pillanatnyi értékét becsüljük az adott pillanatig rendelkezésre álló információk alapján. (Eltérően predikcióról illetve simitásról beszélünk, ha a becslés jövőbeli illetve múltbeli értékre irányul.)

A szűrő tulajdonságait számos tényező befolyásolja. Ezek részben annak a folyamatnak illetve a folyamat leírásának (modelljének) a sajátságai, amelyből a mérések származnak, részben pedig azok az elhatározásaink, amelyeket a szűrő strukturájára, tervezésének módjára vonatkozóan teszünk. Ezeket a szempontokat kíséreljük meg az alábbiakban összefoglalni, a teljesség és a csoportosítás tökéletességének igénye nélkül.

A folyamat illetve a folyamat-modell tulajdonságai közül az alábbiakat kell figyelembe venni:

- elosztott vagy koncentrált paraméterű;
- lineáris vagy nemlineáris;
- statikus vagy dinamikus működésű;

- ha dinamikus, folytonos vagy diszkrét működésű;
- ha a rendszer folytonos, a leírása folytonos vagy diszkrét-e;
- a leírás milyen formájú (pl. átviteli függvény vagy állapotter-modell);
- a folyamat paraméterei időben állandók-e;
- a zaj stacionárius-e;
- a zaj időben korrelált-e.

Az értekezésben mindenütt koncentrált paraméterű lineáris rendszereket tételezünk fel. Bár a 2.4.alfejezetben szó lesz néhány statikus rendszerről is, az értekezés érdemi részei dinamikus rendszerekkel foglalkoznak. Ezekről feltesszük, hogy folytonos működésűek és diszkrét modellel írjuk le őket; az ilyen folytonos-diszkrét rendszerek tulajdonságait és néhány alapformáját az 1.Függelékben tárgyaljuk.

A zajokról feltételezzük, hogy stacionáriusak (és ergodikusak) és időben korrelálatlanok. A 2.Függelékben tárgyaljuk a véletlen jelek néhány tulajdonságát, és ennek kapcsán megadjuk a fenti fogalmak magyarázatát is.

A szűrő strukturájának, tervezési követelményeinek megválasztásakor az alábbi kérdéseket kell eldönteni:

- mely változókra vonatkozik a szűrés (állapotváltozók, kimenőjelek, kimenő- és bemenőjelek);
- statikus vagy dinamikus-e a szűrő;
- lineáris vagy nemlineáris-e a szűrő és ezen belül milyen speciális strukturával rendelkezik;
- stacionárius (állandó paraméterű) a szűrő vagy nem;
- milyen jósági index szolgál a tervezés alapjául;
- a becsült változóknak teljesíteniük kell-e valamilyen további feltételt.

Az értekezésben általában dinamikus szűrőkkel foglalkozunk, bár ezek speciális eseteként, illetve statikus rendszerekhez kapcsolódóan (a 2.4.alfejezetben) szó lesz statikus

algoritmusokról is. Kizárólag lineáris strukturákra fogunk szoritkozni, és elsősorban az időben állandó (stacionárius) szűrő-megoldásokat fogjuk keresni.

Külön figyelmet érdemel itt a jósági index. Amint azt már említettük, a statisztikus szűrő-tervezés alapvető módszere a választott jósági index optimalizálása az adott struktúra és folyamat- illetve zaj-paraméterek valamint az esetleges korlátozások keretei között. A jósági index általában egy négyzetes várható érték jellegű mennyiség. Az irodalomban elterjedt terminológia szerint legkisebb négyzetes (LN) jósági indexről beszélünk, ha az a becsült és mért értékek különbségére vonatkozik, illetve minimális variancia (MV) indexről, ha a becsült és valódi értékek különbségére. Szokásos a jósági indexekben szülőző tényezők használata is. Néhány jósági index formális definícióját meg fogjuk adni a 2.4.alfejezetben.

A szűrő jóságának további jellemzője a becslések várható értékének viselkedése. Általában arra törekszünk, hogy ez megegyezzen a valódi változók várható értékével. Az e követelményt kielégítő szűrőt torzítás-mentesnek nevezzük. Egyébként erre a kérdésre is részletesen ki fogunk térni a 2.4.alfejezetben.

A szűrő gyakorlati alkalmazhatóságát alapvetően befolyásolják azok a tulajdonságok, amelyeket általában robustusság néven szoktak összefoglalni. Ide tartozik a szűrőnek mint numerikus algoritmusnak a stabilitása; nyilvánvaló, hogy egy instabil algoritmus gyakorlatilag használhatatlan. Másrészt lényeges a szűrő érzékenysége, vagyis az, hogy hogyan reagál a folyamat paramétereiben bekövetkező változásokra illetve azok ismeretének eredendő pontatlanságaira. A szűrő stabilitása és érzékenysége annak struktúrájából, a tervezésnél figyelembe vett szempontokból és paraméterekből következik, de mint további szempont vissza is hathat a tervezés menetére és eredményére.

2.3. Szűrés és identifikáció

Amint a bevezetőben már mondtuk, az összetett statisztikus szűrési algoritmusok feltételezik és felhasználják a folyamat modelljének és a zajok statisztikus tulajdonságainak ismeretét. Az ezeket az információkat hasznosító algoritmusok általában jobb becsléseket adnak, mint az ezek nélkül működő egyszerűbb szűrési módszerek. Ha azonban ezek az ismeretek mincsenek birtokunkban, akkor az összetett statisztikus szűrő alkalmazhatósága érdekében a folyamatot illetve a zajt identifikálni kell.

A folyamat identifikációjára igen nagyszámu, jól kidolgozott módszer áll rendelkezésre. Ebben a vonatkozásban utalunk a témában rendezett IFAC szimpóziumok anyagára [H1,H2, H3,H4], valamint néhány hazai munkára [B9,H5,H6].

A zajok identifikációja kevésbé kialakult terület, azonban itt is több eljárás található az irodalomban. Ezek egy része a folyamat-modell birtokában explicite identifikálja a zajok statisztikus paramétereit [G2,G3,G5,G6]. Más eljárások a szűrési algoritmusok olyan kiterjesztései, amelyek a szűrési folyamat során fokozatosan becsülik a zajok paramétereit és ezekhez adaptálják a szűrőt [G1,G2,G4,G7].

A továbbiakban a folyamat és a zaj tulajdonságait mindeütt ismertnek tételezzük fel, és identifikációs kérdésekre nem térünk ki. Megjegyezzük azonban, hogy a paraméterek pontatlan ismerete a szűrő jósági indexének számottevő romlását vonhatja maga után, ami aláhuzza az érzékenységi vizsgálatok jelentőségét [F1 - F15].

2.4. Néhány ismert szűrési algoritmus

Ebben az alfejezetben az irodalomból ismert néhány alapvető lineáris szűrési algoritmust mutatunk be. Elsődleges célunk az, hogy ezzel előkészítsük az értekezés fő tárgyát képező algoritmus bevezetését és megmutassuk annak helyét az ismert módszerek között. Az algoritmusok bemutatását a statikus rend-

szerekhez kapcsolódó legkisebb négyzetes és minimális variancia szűrőkkel kezdjük. Ezután ismertetjük a statikus anyagmérleg-számítások egy módszerét, amely valójában szintén egy - speciális feltételekre kidolgozott - statikus szűrési eljárás. Végül vázlatosan bemutatjuk a legismertebb dinamikus algoritmust, a Kalman-szűrőt.

Ez a bevezető fejezet egyben arra is alkalmat ad, hogy bemutassuk azt a mátrixalgebrai és analízis technikát, amelyet majd az értekezés érdemi részeiben döntően alkalmazni fogunk. Itt elsősorban közismert tankönyvekre utalunk [A1, A2, A13]. Ezek mellett a 3. Függelékben megadjuk néhány, a mátrixok körében definiálható deriválás szabályát, a 4. Függelékben pedig - a szabályok alkalmazásaként - kiszámítjuk a dolgozatban gyakrabban előforduló skalárértékű mátrixfüggvények deriváltját.

2.4.1. Statikus LN szűrő [A7, A10]

Tekintsünk egy fizikai rendszert, amelynek az $\underline{x}(t)$ vektor valamilyen jellemző változója (2.1. ábra). Az $\underline{x}(t)$ vektor közvetlenül nem mérhető, hanem csak - valamilyen megfigyelőn keresztül - annak egy $\underline{y}(t) = \underline{M} \underline{x}(t)$ lineáris függvénye, és ez is csak $\tilde{\underline{y}}(t) = \underline{y}(t) + \underline{v}(t)$ formában, ahol $\underline{v}(t)$ a méréseket terhelő zaj. Az $\underline{x}(t)$ folyamat-változó vektor és az $\tilde{\underline{y}}(t)$ mérési vektor között tehát az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\tilde{\underline{y}}(t) = \underline{M} \underline{x}(t) + \underline{v}(t) \quad (2-1.)$$

Itt \underline{M} ismert állandó mátrix, az $\underline{v}(t)$ zajról pedig feltételezzük, hogy az zérus várható értékű, időben korrelálatlan, független $\underline{x}(t)$ -től és ismert a $\underline{P}_v = \underline{P}_{vv}(0)$ kovariancia-mátrixa. Legyen $\underline{x}(t)$ mérete \underline{n} , $\underline{y}(t)$ mérete \underline{m} , és egyelőre tegyük fel, hogy $\underline{m} \geq \underline{n}$.

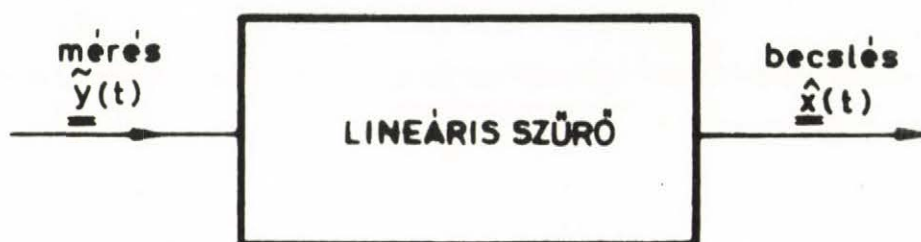
Konstruáljunk egy szűrőt, amely $\underline{x}(t)$ becslését a mérésvektor lineáris függvényeként állítja elő

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{A} \tilde{\underline{y}}(t) \quad (2-2.)$$

formában (2.2. ábra), olymódon, hogy egy legkisebb négyzetes jóssági index minimális legyen. Mivel az $\underline{x}(t)$ változóra közvetlen mérések nem értelmezhetők, a jóssági indexet az $\underline{y}(t)$ változóra



2.1. ábra.



2.2. ábra.

nézve kell megfogalmaznunk, amely így

$$R = E\{[\hat{\underline{y}}(t) - \tilde{\underline{y}}(t)]^T [\hat{\underline{y}}(t) - \tilde{\underline{y}}(t)]\} \quad (2-3.)$$

lesz, ahol

$$\hat{\underline{y}}(t) = \underline{M} \hat{\underline{x}}(t) \quad (2-4.)$$

Feladatunk az \underline{A} szűrő-mátrix meghatározása. Ehhez fejezzük ki $\hat{\underline{y}}(t)$ -t a (2-4.) és (2-2.) egyenletekből és helyettesítsük be a (2-3.) képletbe:

$$R = E\{\tilde{\underline{y}}^T(t)(\underline{A}^T \underline{M}^T - \underline{I})(\underline{M} \underline{A} - \underline{I})\tilde{\underline{y}}(t)\} \quad (2-5.)$$

Ezt kifejtve:

$$R = E\{\tilde{\underline{y}}^T(t)\underline{A}^T \underline{M}^T \underline{M} \underline{A} \tilde{\underline{y}}(t)\} - 2E\{\tilde{\underline{y}}^T(t)\underline{M} \underline{A} \tilde{\underline{y}}(t)\} + E\{\tilde{\underline{y}}^T(t)\tilde{\underline{y}}(t)\} \quad (2-6.)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\tilde{\underline{y}}^T(t)\underline{A}^T \underline{M}^T \underline{y}(t)$, skalár mennyiség lévén, helyettesíthető a saját transzponáltjával. Az optimális \underline{A} mátrix meghatározása érdekében a (2-6.) kifejezést formálisan deriválni fogjuk \underline{A} szerint. Felhasználva a 4.Függelék (F4-1) és (F4-3) összefüggéseit, ez

$$\frac{dR}{d\underline{A}} = 2\underline{P}_{\tilde{\underline{y}}\underline{A}}^T \underline{M}^T \underline{M} - 2\underline{P}_{\tilde{\underline{y}}\underline{M}} \quad (2-7.)$$

ahol

$$\underline{P}_{\tilde{\underline{y}}} = E\{\tilde{\underline{y}}(t)\tilde{\underline{y}}^T(t)\} \quad (2-8.)$$

kvadratikus mátrix. Az \underline{A}_0 szélsőérték helyén a derivált zérus:

$$2\underline{P}_{\tilde{\underline{y}}\underline{A}_0}^T \underline{M}^T \underline{M} - 2\underline{P}_{\tilde{\underline{y}}\underline{M}} = \underline{0} \quad (2-9.)$$

Hacsak $\underline{P}_{\tilde{\underline{y}}}$ nem szinguláris, az az egyenletből eliminálható, és a megoldást

$$\underline{A}_0 = (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \quad (2-10.)$$

alakban kapjuk, feltéve, hogy $\underline{M}^T \underline{M}$ invertálható. Figyelemre méltó, hogy az optimális szűrő-mátrix nem függ a zaj kovariancia-mátrixától.

Hátra lenne még annak bizonyítása, hogy a kapott megoldás valóban minimum. A (2-7.) egyenlet ezt valószínűsíti (\underline{A} együtthatói az első deriváltban pozitív definit mátrixok). A kérdés szigorú vizsgálatára egy más rendszer kapcsán a 9.Függelékben mutatunk be módszert; ennek mintájára a bizonyítás

itt is elvégezhető lenne, ettől azonban eltekintünk.

Térjünk most vissza az $m \geq n$ feltevéshez. Ha $m < n$, az $n \times n$ méretű $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}$ szorzat rangja legfeljebb m , az tehát biztosan nem invertálható, vagyis a (2-10.) megoldás nem létezik. Minimalizálható viszont az $\underline{\underline{R}}$ jósági index az $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}$ egyenlet alapján, amely ekkor $\underline{\underline{A}}$ -ra nem határozott (végtelen sokféle $\underline{\underline{A}}$ -val kielégíthető). A (2-5) egyenletből látnátó, hogy ekkor $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{0}}$. Ha pedig $m \geq n$, az $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}$ szorzat általában nem szinguláris, az $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}$ egyenlet viszont nem megoldható (tulhatározott) $\underline{\underline{A}}$ -ra nézve. Megjegyzendő még, hogy ha $m=n$, akkor $\underline{\underline{A}}_0 = \underline{\underline{M}}^{-1}$ és ha $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}$, akkor $\underline{\underline{A}}_0 = \underline{\underline{I}}$.

Vizsgáljuk most meg a becslés várható értékének viselkedését. A (2-2.) és (2-1.) egyenletek alapján

$$E\{\hat{\underline{\underline{x}}}(t)\} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{M}} E\{\underline{\underline{x}}(t)\} + \underline{\underline{A}} E\{\underline{\underline{v}}(t)\} \quad (2-11.)$$

Mivel

$$\underline{\underline{A}}_0 \underline{\underline{M}} = (\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}})^{-1} \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}} \quad (2-12.)$$

és feltevésünk értelmében a zaj zérus várható értékű,

$$E\{\hat{\underline{\underline{x}}}(t)\} = E\{\underline{\underline{x}}(t)\} \quad (2-13.)$$

vagyis a becslés torzítatlan.

Határozzuk meg a jósági index értékét az optimum helyén. Elvégezve a megfelelő benelyettesítéseket és kihasználva, hogy $\underline{\underline{x}}(t)$ és $\underline{\underline{v}}(t)$ függetlenek, itt nem részletezett számítások után azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{R}} = E\{\underline{\underline{v}}^T(t) [\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}})^{-1} \underline{\underline{M}}^T] \underline{\underline{v}}(t)\} \quad (2-14.)$$

Ez a kifejezés az $\underline{\underline{M}}$ és $\underline{\underline{P}}_0$ mátrixok ismeretében könnyen kiértékelhető.

Végül általánosítsuk az eredeti feladat-kitűzést olyan értelemben, hogy a jósági index tartalmazzon egy súlyozó mátrixot:

$$\underline{\underline{R}} = E\{[\hat{\underline{\underline{y}}}(t) - \tilde{\underline{\underline{y}}}(t)]^T \underline{\underline{L}} [\hat{\underline{\underline{y}}}(t) - \tilde{\underline{\underline{y}}}(t)]\} \quad (2-15.)$$

ahol $\underline{\underline{L}}$ egy tetszőleges pozitív definit szimmetrikus kvadratikusan mátrix. (Kézenfekvő például az $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{P}}_0^{-1}$ választás, ahol tehát a négyzetes eltéréseket a zajok kovariancia-mátrixának

inverzével szorozzuk.) Az előző gondolatmenetet követve az alábbi megoldást kapjuk:

$$\underline{A}_0 = (\underline{M}^T \underline{L} \quad \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{L} \quad (2-16.)$$

ahol természetesen az $\underline{M}^T \underline{L} \underline{M}$ mátrixnak invertálhatónak kell lennie. Mivel $\underline{A}_0 \underline{M} = \underline{I}$ most is teljesül, ez a szűrő is torzítás-mentes.

2.4.2. Statikus MV szűrő [A7, A10]

Tekintsük ismét a 2.4.1.pontban a (2-1.) egyenletben definiált rendszert. Tervezzünk lineáris szűrőt a (2-2.) egyenlet szerinti formában, de most egy minimális variancia jóssági index minimalizálását tűzzük ki célul. Ez felírható közvetlenül az $\underline{x}(t)$ változóra a következő alakban:

$$Q = E\{[\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]^T [\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]\} \quad (2-17.)$$

Az optimális szűrő-mátrix meghatározása érdekében fejezzük ki a Q jóssági indexet az \underline{A} függvényeként. A (2-2.) és (2-1.) egyenletek felhasználásával ez az alábbi lesz:

$$Q = E\{[\underline{x}^T(t)(\underline{M}^T \underline{A}^T - \underline{I}) + \underline{v}^T(t) \underline{A}^T][(\underline{A} \underline{M} - \underline{I}) \underline{x}(t) + \underline{A} \underline{v}(t)]\} \quad (2-18.)$$

Némi átrendezés után, és figyelembe véve, hogy $\underline{x}(t)$ és $\underline{v}(t)$ függetlenek, azt kapjuk, hogy

$$Q = E\{\underline{x}^T(t)(\underline{M}^T \underline{A}^T - \underline{I})(\underline{A} \underline{M} - \underline{I}) \underline{x}(t)\} + E\{\underline{v}^T(t) \underline{A}^T \underline{A} \underline{v}(t)\} \quad (2-19.)$$

Ezt tovább alakítva

$$Q = E\{\underline{x}^T(t) \underline{M}^T \underline{A}^T \underline{A} \underline{M} \underline{x}(t)\} - 2E\{\underline{x}^T(t) \underline{A} \underline{M} \underline{x}(t)\} + E\{\underline{x}^T(t) \underline{x}(t)\} + E\{\underline{v}^T(t) \underline{A}^T \underline{A} \underline{v}(t)\} \quad (2-20.)$$

Deriváljuk ez utóbbi kifejezést \underline{A} szerint. Az (F4-1.) és (F4-2.) összefüggések alapján

$$\frac{dQ}{d\underline{A}} = 2\underline{M} \underline{P}_x \underline{M}^T \underline{A}^T - 2\underline{M} \underline{P}_x + 2\underline{P}_v \underline{A}^T \quad (2-21.)$$

ahol

$$\underline{P}_x = E\{\underline{x}(t) \underline{x}^T(t)\} \quad (2-22.)$$

A szélsőérték helyén a derivált zérus; ebből az \underline{A}_0 optimális szűrő-mátrix

$$\underline{A}_0 = \underline{P}_x \underline{M}^T (\underline{M} \underline{P}_x \underline{M}^T + \underline{P}_v)^{-1} \quad (2-23.)$$

A második derivált vizsgálata alapján bizonyítható, hogy ez valóban minimum. Láthatóan az optimális szűrő-mátrix nemcsak a zaj, hanem a jel kovariancia-mátrixától is függ, ami általában hátrányos. Az $m \geq n$ feltételnek most nem kell teljesülnie, mivel \underline{P}_v jelenléte általában biztosítja az $\underline{M} \underline{P}_x \underline{M}^T + \underline{P}_v$ mátrix invertálhatóságát még akkor is, ha az $\underline{M} \underline{P}_x \underline{M}^T$ tag szinguláris.

A (2-23.) eredmény egyébként - azonos átalakításokkal - még az alábbi egyenértékű alakra hozható:

$$\underline{A}_0 = (\underline{M}^T \underline{P}_v^{-1} \underline{M} + \underline{P}_x^{-1})^{-1} \underline{M}^T \underline{P}_v^{-1} \quad (2-24.)$$

Vizsgáljuk meg a becslés várható értékének viselkedését. Mivel a strukturák azonosak azokkal, amelyeket az LN szűrő kapcsán figyelembe vettünk, a (2-11.) egyenlet változatlanul igaz. Emellett a zaj most is zérus várható értékű. Azonban esetünkben

$$\underline{A}_0 \underline{M} = (\underline{M}^T \underline{P}_v^{-1} \underline{M} + \underline{P}_x^{-1})^{-1} \underline{M}^T \underline{P}_v^{-1} \underline{M} \quad (2-25.)$$

ami általában nem azonos az egységmátrixszal, így a becslés torzított.

Torzítás-mentes MV szűrőhöz juthatunk, ha a torzítatlanság feltételét előírjuk, vagyis ha azt az \underline{A}_C szűrő-mátrixot keressük, amely az $\underline{A} \underline{M} = \underline{I}$ feltétel kielégítése mellett minimalizálja a \underline{Q} jósági indexet. Természetesen ez azt jelenti, hogy a feltétel kielégítése érdekében a jósági index rovására kell engedményt tennünk.

Láthatóan ha a feltétel teljesül, a jósági index (2-19.)-beli alakjában az első tag zérus. Így feladatunk a

$$\underline{Q}' = E\{\underline{v}^T(t) \underline{A}^T \underline{A} \underline{v}(t)\} \quad (2-26.)$$

kifejezés minimalizálása az

$$\underline{A} \underline{M} = \underline{I} \quad (2-27.)$$

feltétel egyidejű teljesítése mellett.

Megjegyzendő itt, hogy az \underline{A} mátrixnak $n \times m$ eleme van, az $\underline{A} \underline{M}$ mátrixnak pedig $n \times n$ eleme. A (2-27.) egyenlet tehát

az \underline{A} mátrixot eleve tulhatározza, ha $m < n$. A feltételes szélsőérték-feladatnak tehát csak akkor van értelme, ha $m \geq n$. Ezen belül, ha $m = n$, az \underline{A} mátrixot a (2-27.) feltétel már egyedül meghatározza.

A fentiekben megfogalmazott feltételes szélsőérték-számítási feladathoz hasonló probléma megoldására a 9. Függelékben mutatunk be példát. Ennek mintájára megoldva az adott feladatot azt kapjuk, hogy

$$\underline{A}_C = (\underline{M}^T \underline{P}_U^{-1} \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{P}_U^{-1} \quad (2-28.)$$

Ez a szűrő-mátrix nem függ a jel kovariancia-mátrixától. A megoldás feltétele az, hogy $\underline{M}^T \underline{P}_U^{-1} \underline{M}$ invertálható legyen. Mivel ennek mérete $n \times n$, rangja pedig legfeljebb m , az invertálhatósághoz is szükséges, hogy $m \geq n$ teljesüljön.

Látható, hogy a (2-28.) eredmény a (2-24.) szerinti szűrő-mátrix határesetre, ha $\underline{P}_x^{-1} = \underline{0}$.

A (2-28.) eredményből azonnal látszik, hogy teljesül az $\underline{A}_C \underline{M} = \underline{I}$ feltétel, vagyis a szűrő valóban torzítás-mentes.

Hátra van még a jósági index meghatározása az optimum helyén. Elvégezve a megfelelő helyettesítéseket és némi, itt nem részletezett számítás után azt kapjuk, hogy ennek értéke torzításos MV szűrőre

$$Q = \text{tr}[(\underline{M}^T \underline{P}_U^{-1} \underline{M} + \underline{P}_x^{-1})^{-1}] \quad (2-29.)$$

torzítás-mentes MV szűrőre pedig

$$Q = \text{tr}[(\underline{M}^T \underline{P}_U^{-1} \underline{M})^{-1}] \quad (2-30.)$$

Figyelemreméltó tulajdonsága az MV szűrőnek, hogy - mind a torzításos, mind a torzítás-mentes esetben - invariáns a jósági index súlyozására. Ha ugyanis a

$$Q = E\{[\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]^T \underline{L} [\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]\} \quad (2-31.)$$

jósági indexre (ahol az \underline{L} súlyozó-mátrix szimmetrikus és pozitív definit) az \underline{A} mátrix levezetését megismételjük, akkor a súlyozatlan indexhez képest változatlan eredményeket kapunk.

2.4.3. Statikus anyagmérleg [C3]

Kémiai technológiai jellegű rendszerek irányításában és ellenőrzésében jelentős szerepet játszanak az anyag- és energia-

mérleg-számítások. Ezek az adott rendszerre vonatkozó fizikai-kémiai megmaradási egyenleteken alapulnak. Gyakorlati céljuk kettős: egyrészt a szisztematikus mérési hibákat és szivárgásokat kívánják általuk felderíteni és behatárolni, másrészt a méréseket korrigálni a véletlen mérési hibákra. Az első célkitűzés megvalósítása nem könnyű: a mérleg-számításokat statisztikus hipotézis-vizsgálati módszerekkel szokás kombinálni, azonban így is csak valószínűségi erejű következtetések vonhatók le. A mérések korrekciója a zajok statisztikus tulajdonságainak ismeretében - szintén statisztikus értelemben - általában elvégezhető.

A gyakorlatban alkalmazott mérleg-számítások a rendszert általában statikusként kezelik. Ujabban vannak törekvések a rendszer-dinamika figyelembevételére is, mégpedig vagy a statikus algoritmus kiterjesztésével [B4,B5], vagy a Kalman-szűrő alkalmazásával [I1,I2].

A következőkben a mérleg-számításokkal csak mint hiba-korrekciós eljárással fogunk foglalkozni. Ebben a vonatkozásban a mérleg-algoritmus lényegében egy speciális strukturájú és feltétel-rendszerű statisztikus szűrő. Lineáris rendszerekre szorítunk és - ebben a bevezető fejezetben - azt is feltételezzük, hogy a rendszer statikus.

Legyen $\underline{x}(t)$ a rendszer-változók n elemű vektora. Álljon fenn a változók között m számú lineáris mérleg-egyenlet. Irjuk le a mérleg-egyenleteket nullára rendezve mátrix-formában:

$$\underline{K} \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (2-32.)$$

ahol \underline{K} a mérleg-egyenletek együtthatóinak mátrixa.

Az $\underline{x}(t)$ vektor mérése

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) + \underline{\xi}(t) \quad (2-33.)$$

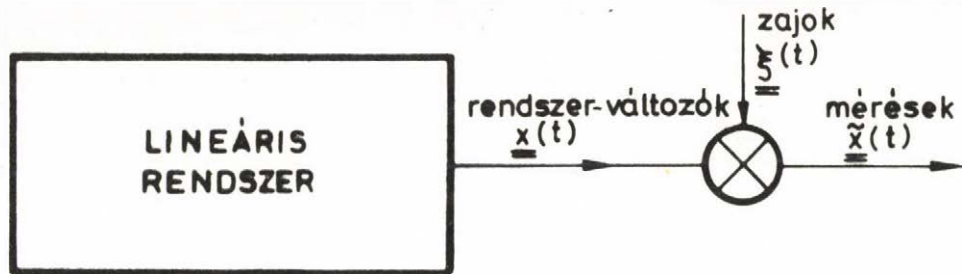
(2-3. ábra), ahol a $\underline{\xi}(t)$ mérési zajról feltételezzük, hogy zérus várható-értékű, időben korrelálatlan, független $\underline{x}(t)$ -től és ismert a $\underline{P}_{\xi} = \underline{P}_{\xi\xi}(0)$ kovariancia-mátrixa.

Az $\tilde{\underline{x}}(t)$ mérés-vektor általában nem elégíti ki a (2-32.) mérleg-egyenletet, hanem azzal egy

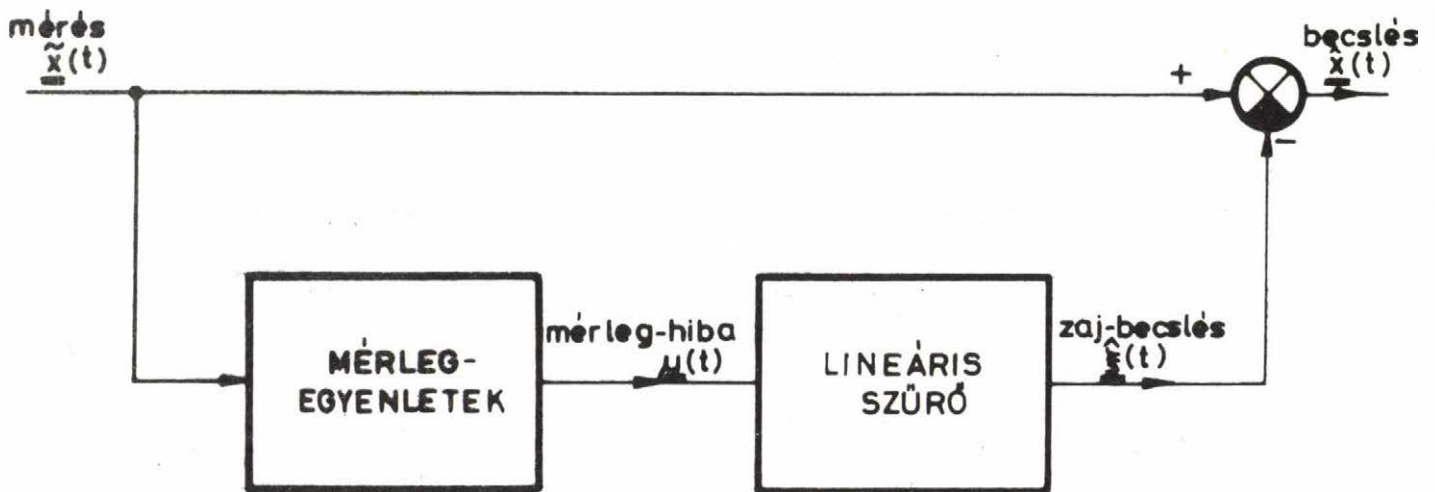
$$\underline{\mu}(t) = \underline{K} \tilde{\underline{x}}(t) \quad (2-34.)$$

hiba-vektort szolgáltat. Kézenfekvő a zaj egy becslését keresni a hiba-vektor lineáris függvényeként

$$\hat{\underline{\xi}}(t) = \underline{A} \underline{\mu}(t) \quad (2-35.)$$



2.3. ábra.



2.4. ábra.

majd ezzel korrigálni a mérést (2.4.ábra):

$$\hat{\underline{x}}(t) = \tilde{\underline{x}}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t) \quad (2-36.)$$

Az \underline{A} mátrix meghatározásakor két követelményt fogunk figyelembe venni:

- A korrigált mérések elégítsék ki a mérleg-egyenletet, vagyis teljesüljön

$$\underline{K} \hat{\underline{x}}(t) = \underline{0} \quad (2-37.)$$

- A korrigált mérések minimalizálják az

$$r = [\hat{\underline{x}}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\hat{\underline{x}}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)] \quad (2-38.)$$

pillanatnyi súlyozott LS jósaági indexet. (Itt a zaj kovariancia-mátrixának inverzével való súlyozást az a megfontolás indokolja, hogy nagyobb mérési zajjal terhelt változón nagyobb hiba tűrhető el.)

A feladat megoldását a (2-35.) struktura felhasználása nélkül fogjuk megkísérelni, majd ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény e strukturának megfelel-e. A megoldás előkészítése érdekében a (2-37.) és (2-38.) egyenletet kissé átírjuk. A (2-36.) és (2-34.) összefüggések felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\underline{\mu}(t) - \underline{K} \hat{\underline{\xi}}(t) = \underline{0} \quad (2-39.)$$

illetve

$$r = \hat{\underline{\xi}}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t) \quad (2-40.)$$

Feladatunk tehát a (2-40.) kifejezés minimalizálása a (2-39.) feltétel kielégítése mellett. A megoldásra a Lagrange-technikát alkalmazzuk:

$$r^* = \hat{\underline{\xi}}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t) + \underline{\lambda}^T(t) [\underline{\mu}(t) - \underline{K} \hat{\underline{\xi}}(t)] \quad (2-41.)$$

Ennek deriváltja a 4.Függelék alapján

$$\frac{dr^*}{d\hat{\underline{\xi}}(t)} = 2\hat{\underline{\xi}}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} - \underline{\lambda}^T(t) \underline{K} \quad (2-42.)$$

Ez a szélsőérték helyén zérus, amiből

$$\hat{\underline{\xi}}(t) = \frac{1}{2} \underline{P}_{\xi} \underline{K}^T \underline{\lambda}(t) \quad (2-43.)$$

Ezt a (2-39.) egyenletbe helyettesítve és megoldva $\underline{\lambda}(t)$ -re:

$$\underline{\lambda}(t) = 2(\underline{K} \underline{P}_{\xi} \underline{K}^T)^{-1} \underline{u}(t) \quad (2-44.)$$

Végül visszatérve a (2-43.) alakhoz

$$\hat{\underline{\xi}}(t) = \underline{P}_{\xi} \underline{K}^T (\underline{K} \underline{P}_{\xi} \underline{K}^T)^{-1} \underline{u}(t) \quad (2-45.)$$

Ezt az eredményt a (2-35.) struktúra-definícióval egybevetve azt kapjuk, hogy az \underline{A}_C optimális szűrő-mátrix

$$\underline{A}_C = \underline{P}_{\xi} \underline{K}^T (\underline{K} \underline{P}_{\xi} \underline{K}^T)^{-1} \quad (2-46.)$$

A megoldhatósághoz szükséges, hogy $\underline{K} \underline{P}_{\xi} \underline{K}^T$ invertálható legyen; ez általában teljesül, ha $m \leq n$. Másrészt (2-42.) deriválásából

$$\frac{d^2 r^*}{d\hat{\underline{\xi}}(t) d\hat{\underline{\xi}}^T(t)} = 2 \underline{P}_{\xi}^{-1} \quad (2-47.)$$

pozitív definit mátrix, tehát a kapott szélsőérték valóban minimum.

Megjegyezzük, hogy a (2-46.) képlet szerinti szűrő formálisan az MV szűrő (2-23.) alakjának speciális esete, ha ez utóbiban $\underline{P}_0 = \underline{0}$, a két összefüggésben szereplő mennyiségek természetesen azonban nincsenek egymással kapcsolatban.

A (2-38.) összefüggésben pillanatnyi súlyozott LS jósági indexet definiáltunk. Hasonló módon definiálható egy pillanatnyi súlyozott MV jósági index is, de erre a feladat - a zaj pillanat-értékének jelenléte miatt - nem megoldható. Másrészt lehetséges, a korábbiakhoz hasonló módon, várható értékre vonatkozó súlyozott LS és MV jósági indexeket definiálni. Ezekkel a 4. Fejezetben fogunk foglalkozni, és ott megmutatjuk, hogy mindkettő a (2-46.) formulával azonos megoldásra vezet.

Végezetül vizsgáljuk meg a becslés várható értékének viselkedését. A (2-36.), (2-35.), (2-34.) és (2-33.) összefüggésekből

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) - \underline{A} \underline{K} \underline{x}(t) + (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}) \underline{\xi}(t) \quad (2-48.)$$

A (2-32.) összefüggés miatt itt a második tag zérus. Ezt figye-

lembe véve és várható értéket képezve

$$E\{\hat{\underline{x}}(t)\} = E\{\underline{x}(t)\} + (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}) E\{\underline{\xi}(t)\} \quad (2-49.)$$

Mivel a zaj várható értéke zérus,

$$E\{\hat{\underline{x}}(t)\} = E\{\underline{x}(t)\} \quad (2-50.)$$

vagyis a becslés torzítatlan. Ez a tulajdonság most a szűrő strukturájából fakad és független az \underline{A} mátrix értékétől.

A statikus anyagmérleg-algoritmus kiterjeszthető méretlen (determinisztikus vagy véletlen) változókat tartalmazó rendszerekre is [C3,C5].

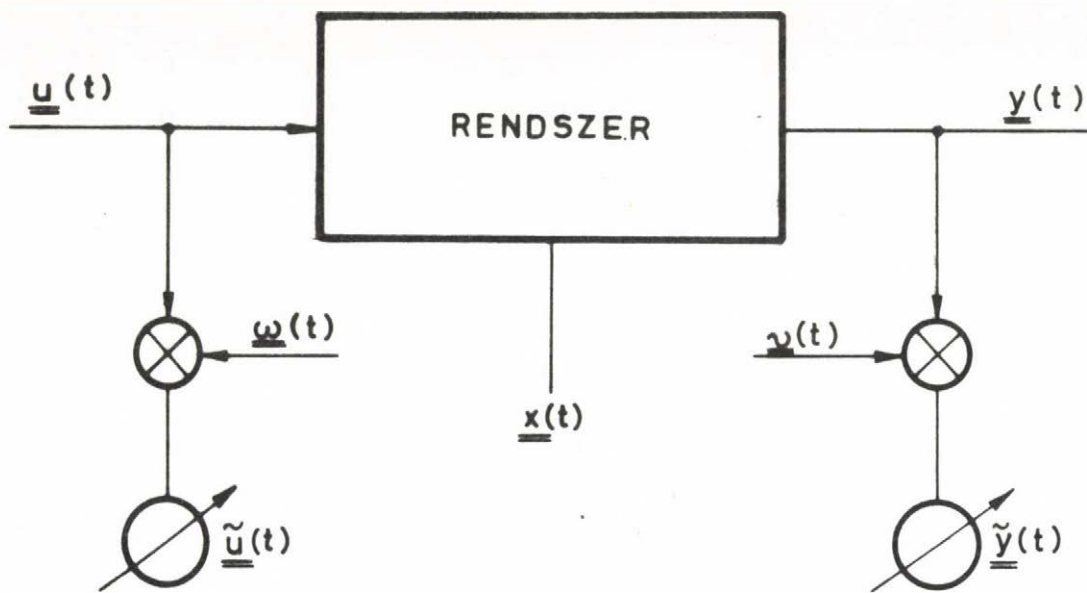
2.4.4. Kalman-szűrő [D12,D13]

A Kalman-szűrő az utóbbi két évtized irányításelméleti irodalmának egyik leggyakrabban feldolgozott témája. Az eddig tárgyalt algoritmusoktól elsősorban abban különbözik, hogy dinamikus rendszerek változóinak becslésére szolgál. A lineáris dinamikus rendszert állapotegyenleteivel írjuk le. A Kalman-szűrőnek mind folytonos, mind diszkrét rendszerekre kidolgozott változatai ismertek; mi folytonos-diszkrét modellel leírt folytonos rendszerre fogunk szoritkozni (lásd az 1.Függeléket).

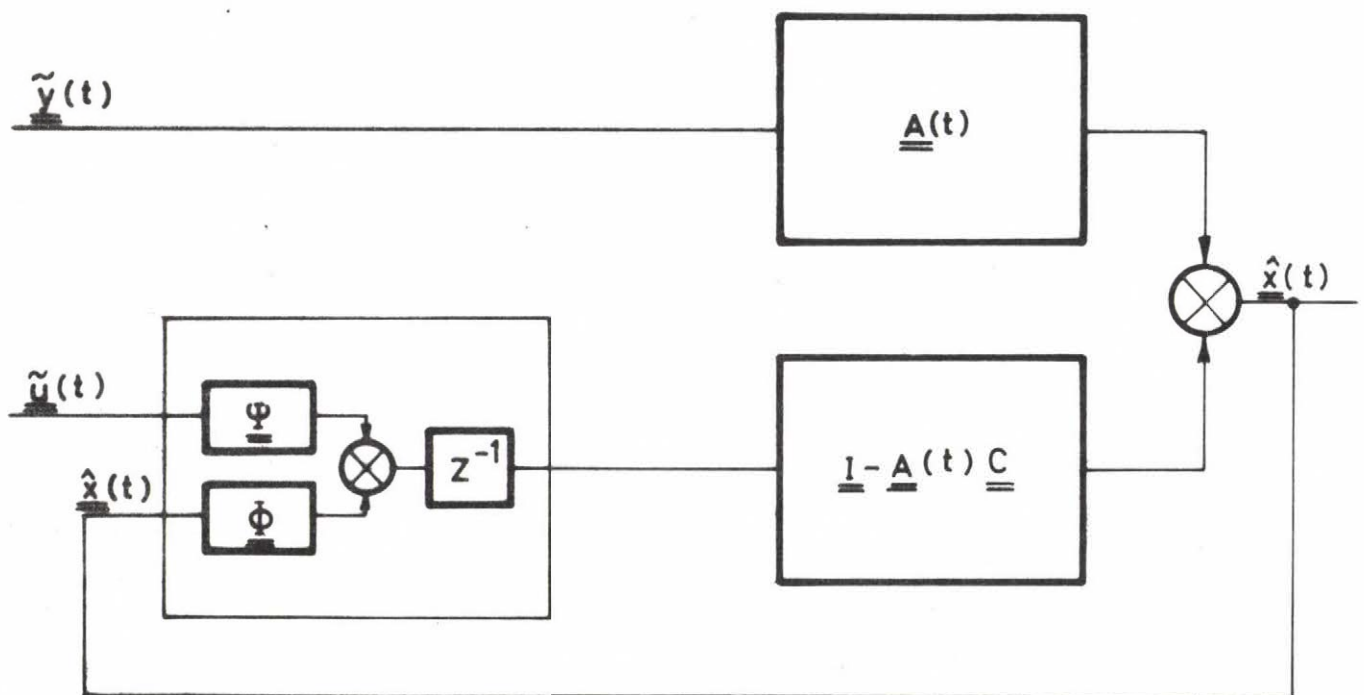
A Kalman-szűrő a rendszer állapot-változóit becsüli. Dinamikus működésű, amennyiben a becsléshez korábbi változó értékeket (a bemenő-jel előző értékét és az előző becslési lépés eredményét) is felhasznál. (Az utóbbi miatt a szűrő rekurzív működésű is.) Lineáris strukturájú: az új becslést az előző becslés és az új mérés lineáris kombinációjaként állítja elő. Jósági indexe MV típusú: az állapot-változók becslési hibájának négyzetes várható értéke.

A Kalman-szűrő különböző levezetései ma már számos tankönyvben megtalálhatók. Ezért a következőkben csupán a főbb gondolatokat fogjuk bemutatni a részletek mellőzésével. Egy korábbi saját publikáció [B6] gondolatmenetét fogjuk követni, amely a jelen értekezésben is használt mátrix-analízis módszereket alkalmazza.

Tekintsünk egy több-bemenet több-kimenetű folytonos-diszkrét lineáris dinamikus rendszert (2-5. ábra). Legyen a rendszer bemenő-jele $\underline{u}(t)=[u_1(t)\dots u_k(t)]^T$, kimenő-jele $\underline{y}(t)=[y_1(t)\dots y_m(t)]^T$ és állapot-vektora $\underline{x}(t)=[x_1(t)\dots x_n(t)]^T$.



2.5. ábra.



2.6. ábra.

A változók közti összefüggést az alábbi állapot-egyenletek írják le:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\Phi} \underline{x}(t-\Delta t) + \underline{\Psi} \underline{u}(t-\Delta t) \quad (2-51.)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) \quad (2-52.)$$

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a rendszer paraméterei időben állandóak, vagyis a $\underline{\Phi}$, $\underline{\Psi}$ és \underline{C} rendszer-mátrixok a t időtől nem függenek ($\underline{\Phi}$ és $\underline{\Psi}$ függ viszont a Δt mintavételi intervallumtól). Mind a bemenő-, mind a kimenő-jellet zajjal terhelve mérjük:

$$\underline{\tilde{u}}(t) = \underline{u}(t) + \underline{w}(t) \quad (2-53.)$$

$$\underline{\tilde{y}}(t) = \underline{y}(t) + \underline{v}(t) \quad (2-54.)$$

Az $\underline{w}(t)$ és $\underline{v}(t)$ mérési zajokról feltételezzük, hogy azok stacionáriusak, zérus várható értékűek, időben korrelálatlanok és függetlenek egymástól és a bemenő-jeltől.

A zajos mérésekből az $\underline{x}(t)$ állapot-vektort kívánjuk becsülni. A becslésben felhasználjuk az állapot-vektor előző becsült értékét is. Az új becslést a kimenő-jel új mérésének, valamint az előző becslésből és a bemenő-jel előző méréséből a (2-51.) egyenlettel számított állapot-vektornak a lineáris kombinációjaként állítjuk elő:

$$\underline{\hat{x}}(t) = \underline{A}(t) \underline{\tilde{y}}(t) + \underline{B}(t) [\underline{\Phi} \underline{\hat{x}}(t-\Delta t) + \underline{\Psi} \underline{\tilde{u}}(t-\Delta t)] \quad (2-55.)$$

Itt az $\underline{A}(t)$ és $\underline{B}(t)$ arányossági tényezők a tulajdonképpeni szűrő-mátrixok.

A két figyelembe vett információ együttes súlya egységnyi kell hogy legyen. A szögletes zárójelben álló kifejezés egy állapot-vektor, az $\underline{\tilde{y}}(t)$ kimeneti mérés viszont a \underline{C} mátrixon keresztül függ a (valódi) állapot-vektortól. Ezért az $\underline{A}(t) \underline{C} + \underline{B}(t) = \underline{I}$ összefüggésnek kell teljesülnie; ebből $\underline{B}(t) = \underline{I} - \underline{A}(t) \underline{C}$. Ezzel a (2-55.) szűrő-egyenlet

$$\underline{\hat{x}}(t) = \underline{A}(t) \underline{\tilde{y}}(t) + [\underline{I} - \underline{A}(t) \underline{C}] [\underline{\Phi} \underline{\hat{x}}(t-\Delta t) + \underline{\Psi} \underline{\tilde{u}}(t-\Delta t)] \quad (2-56.)$$

A fenti szűrő-egyenletnek megfelelő tömb-vázlatot a 2.6. ábra mutatja.

Az $\underline{A}(t)$ szűrő-mátrixot úgy kell meghatározni, hogy az állapot-vektorra vonatkozó

$$Q = E\{[\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)][\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]^T\} \quad (2-57.)$$

MV jósági index minimális legyen. A rövidség kedvéért vezessük be az állapot-vektor becslési hibájára a $\underline{k}(t) = \hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)$ jelölést; ezzel $Q = E\{\underline{k}^T(t)\underline{k}(t)\}$. A (2-51.)...(2-55.) egyenletekből levezethető, hogy a becslési hiba viselkedését az alábbi állapot-egyenlet írja le:

$$\underline{k}(t) = [\underline{I} - \underline{A}(t)\underline{C}] \underline{\phi}\underline{k}(t-\Delta t) + [\underline{I} - \underline{A}(t)\underline{C}] \underline{\psi}\underline{\omega}(t-\Delta t) + \underline{A}(t)\underline{v}(t) \quad (2-58.)$$

Ebből a jósági index - figyelembe véve a zajok fehérségéről és függetlenségéről mondottakat -:

$$\begin{aligned} Q &= E\{\underline{k}^T(t-\Delta t) \underline{\phi}^T [\underline{I} - \underline{A}(t)\underline{C}]^T [\underline{I} - \underline{A}(t)\underline{C}] \underline{\phi}\underline{k}(t-\Delta t)\} + \\ &+ E\{\underline{\omega}^T(t) \underline{\psi}^T [\underline{I} - \underline{A}(t)\underline{C}]^T [\underline{I} - \underline{A}(t)\underline{C}] \underline{\psi}\underline{\omega}(t)\} + \\ &+ E\{\underline{v}^T(t) \underline{A}^T(t)\underline{A}(t)\underline{v}(t)\} \end{aligned} \quad (2-59.)$$

Az optimális szűrő-mátrix a jósági index deriválásából a szokásos módon kapható. Az eredmény:

$$\underline{A}_0(t) = \underline{S}(t) \underline{C}^T [\underline{C} \underline{S}(t) \underline{C}^T + \underline{P}_v]^{-1} \quad (2-60.)$$

ahol

$$\underline{S}(t) = \underline{\phi} \underline{P}_k(t-\Delta t) \underline{\phi}^T + \underline{\psi} \underline{P}_\omega \underline{\psi}^T \quad (2-61.)$$

segédmenyiség, a \underline{P}_v , \underline{P}_ω és $\underline{P}_k(t)$ mátrixok pedig a zajok illetve a becslési hiba kovariancia-mátrixai. Ez utóbbi a következőképpen számítható:

$$\underline{P}_k(t) = [\underline{I} - \underline{A}(t)\underline{C}] \underline{S}(t) \quad (2-62.)$$

Az optimális szűrő-mátrix meghatározására szolgáló (2-60.), (2-61.) és (2-62.) formulák rekurzívak; azokat minden szűrési lépésben ki kell értékelni. A becslés kovarianciája változik (csökken) lépésről lépésre, és ennek megfelelően változik az optimális mátrix szűrő-mátrix is. (Az egyes lépésekben nyert \underline{P}_k és \underline{A} értékek a mérésektől függetlenek, így a teljes sorozat akár előre is kiszámítható.) Ha a rendszer és a zajok paraméterei időben nem változnak (amint feltételeztük), a becslés kovarianciája és a szűrő-mátrix állandósult értékhez tart. A gyakorlatban sokszor megengedhető a változó szűrő-mátrix helyett eleve az

állandósult érték használata. Ez azt eredményezi, hogy a szűrési folyamat kezdetén a szűrő nem lesz optimális, de az eltérések kovariancia-mátrixa és ezzel a jósági index - ha lassabban is - ugyanahhoz az állandósult értékhez konvergál. Az állandósult értékekre a (2-60.), (2-61.), (2-62.) egyenletrendszer formálisan megoldható, a megoldás kiszámítása azonban így is igen munkaigényes.

A (2-58.) egyenletből látható, hogy állandósult állapotban a becslési eltérések várható értéke a mérési zajok várható értékével arányos. Ha ez utóbbiak - amint feltételeztük - zérus értékűek, a becslés torzítatlan.

3. AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT DINAMIKUS ANYAGMÉRLEG MINT STATISZTIKUS SZÜRŐ

3.1. Bevezetés

A továbbiakban célunk egy olyan statisztikus szűrési eljárás kidolgozása és elemzése lesz, amely folytonos ipari folyamatok változóinak on-line becslésére célszerűen alkalmazható. Feltételezésünk értelmében a szűrt adatok elsősorban passzív felhasználásra fognak szolgálni, mint a kezelő tájékoztatása, műszaki-gazdasági számítások stb.

A megfigyelés tárgyát képező folyamat folytonos dinamikus, lineáris, koncentrált és állandó paraméterű. Mintavételes méréseket tételezünk fel, ezért a rendszert folytonos-diszkrét modelljével írjuk le; a folyamat-modellt ismertnek tekintjük. A be- és kimenő változókat torzító mérési zajokról a szokásos feltevésekkel élünk (stacionaritás, időbeli korrelálatlanság, függetlenség a folyamat-változóktól, zérus várható érték) és korrelációs (kovariancia) mátrixukat ismertnek tételezzük fel. Később azt is meg fogjuk vizsgálni, hogy a folyamat-modell vagy a zaj-kovarianciák pontatlan ismerete illetve a mérési zajokra vonatkozó egyes feltevések nem teljesülése hogyan befolyásolja az eljárás működését.

Általában fel fogjuk tételezni, hogy a rendszerleírásban szereplő valamennyi kimenő változó mért (pontosabban csak a mért kimenő változókra írunk fel egyenleteket), ugyyszintén az azokat meghatározó összes bemenő változó is. Ez azt is magában foglalja, hogy rendszerzaj nem lép fel. Később azonban bemutatjuk a módszer kiterjesztését méretlen rendszerváltozók illetve, speciális esetként, rendszerzaj kezelésére.

Miután a szűrt adatokat elsősorban adatfeldolgozásra illetve a kezelő tájékoztatására szánjuk, azok fizikailag közvetlenül értelmezhető változókra kell hogy vonatkozzanak. Ezért a szűrés nem az állapotváltozók becslésére irányul, hanem a folyamat kimenő és bemenő változóira. A bemenő változók becslése - a szokásos elméleti megközelítéstől eltérően - itt azért indokolt, mert ipari folyamatok esetében azokat is mérési zajok terhelik és pontos ismeretük épp úgy szükséges, mint a kimenő változóké. A mérnöki szemléletet követve a becsült változóktól

azt is célszerű megkövetelni, hogy azok konzisztensek legyenek, vagyis elégítsék ki a rendszeregyenleteket.

Jósági indexként a minimális variancia kritériumot választjuk, hiszen természetszerűleg abban vagyunk érdekelve, hogy a becsült változók a valódi értékeket közelítsék meg minél jobban (és ne a mérteket, ahogy az a legkisebb négyzetes index esetében történik). A mérnöki szemlélet azt is sugallja, hogy nagyobb mérési zajjal terhelt változó esetén relative nagyobb becslési hiba tűrhető el. Ezért a jósági indexben a megfelelő zaj-szórásokra vonatkoztatott relatív becslési hiba-négyzeteket célszerű figyelembe venni; természetesen másfajta súlyozás is lehetséges.

A megfigyelt folyamat dinamikus lévén a szűrő is szükség-szerűen dinamikus lesz. Az on-line alkalmazás elősegítése (a számítási igény csökkentése) érdekében a szűrőnek rekurzív működésűnek kell lennie. Célszerűen egyszerű, vagyis lineáris struktúrát választunk.

Lényeges kérdés, hogy a szűrő állandó vagy változó paraméterű-e. Egy állandó paraméterű szűrő on-line számítási igénye lényegesen kisebb, mivel a szűrő tervezése nem része az on-line számításoknak, hanem előre, off-line módon elvégezhető. Változó paraméterű szűrő alkalmazása két ok miatt lehet indokolt. Az egyik az, ha a folyamat paraméterei időben változnak, ezt azonban feltevéseink értelmében kizártuk. (Folyamatirányítási alkalmazásokra tulajdonképpen egyes folyamat-paraméterek lassu változása jellemző; ilyen körülmények között lehetséges az állandó paraméterű szűrő időről időre történő off-line ujratervezése.) A másik ok az a körülmény, hogy a rekurzív szűrési folyamat során az egyes lépésekben változó feltételeket teremtünk a következő lépés számára (változik a becslések szórása). Ez azonban csak a szűrési folyamat indulási időszakában lényeges, később a szűrő - ha stabil - beáll valamilyen állandósult állapotba. Folytonos folyamatok változóinak szűrése esetén a szűrési folyamat indulási időszaka általában nem jelentős, ezért megengedhető, hogy az állandósult állapotra optimális (a változó paraméterű, pillanatnyi állapotra optimális szűrőhöz képest szuboptimális)

szűrőt használjunk kezdetről fogva. Ezért állandó paraméterű szűrő tervezését tűzzük ki célul.

Összefoglalva: egy állandó paraméterű rekurzív dinamikus szűrőt kívánunk létrehozni alkalmas lineáris struktúrával, amely ismert lineáris rendszerek be- és kimenő változóit becsüli oly módon, hogy a becslések minimalizálják a mérési zajok kovarianciáival súlyozott MV jósaági indexet és egyidejűleg kielégítik a rendszeregyenleteket. A felsorolt követelmények - a dinamikától eltekintve - megegyeznek azokkal, amelyek alapján a 2.4.3. pontban ismertetett anyagmérleg algoritmus létrejött. Ezért várható, hogy a kitűzött feladat az anyagmérleg algoritmus dinamikus kiterjesztésével megoldható. A következőkben ezt a kiterjesztést fogjuk elvégezni, majd az így előálló algoritmust mint statisztikus szűrőt vesszük beható vizsgálat alá.

3.2. A tervezés alapfeltételei

Tekintsünk egy több-bemenet több-kimenetű koncentrált paraméterű lineáris folytonos dinamikus rendszert (3-1. ábra). Legyen a bemenő változók vektora $\underline{u}(t) = [u_1(t); \dots; u_k(t)]^T$, a kimenő változók vektora pedig $\underline{y}(t) = [y_1(t); \dots; y_m(t)]^T$ és legyen a rendszer rendszáma n . A rendszert folytonos-diszkrét modelljével írjuk le (lásd az 1. Függelék), mégpedig - mivel a be- és kimeneti változók becslése lesz a célunk - a bemenet-kimeneti átviteli függvény modellel:

$$\underline{y}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}} \underline{u}(t) \quad (3-1.)$$

Itt a h_i paraméterek ismert skalárok, a \underline{G}_i paraméterek pedig ismert $m \times k$ méretű mátrixok. A fenti átviteli függvény modellel egyenértékű az alábbi leírás:

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i} \underline{u}(t) - \sum_{i=1}^n h_i z^{-i} \underline{y}(t) \quad (3-2.)$$

Az anyagmérleg-számításokban kialakult szokásnak megfelelően a fenti rendszeregyenletet nullára rendezett formában fogjuk alkal-

mazni. Vezessük be a bemeneti és kimeneti változók kombinált vektorát:

$$\underline{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} \quad (3-3.)$$

(\underline{x} tehát itt nem a szokásos állapot-vektor.) Ezzel a nullára rendezett rendszeregyenlet

$$\sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (3-4.)$$

ahol

$$\underline{K}_i = [\underline{G}_i \quad -h_i \underline{I}] \quad i=0 \dots n \quad (3-5.)$$

$m \times (k+m)$ méretű mátrixok, \underline{I} az egységmátrix (itt $m \times m$ méretű) és $h_0 = 1$.

A bemenő és kimenő változókat az $\underline{u}(t)$ illetve $\underline{y}(t)$ mérési zajok torzítják (3-1. ábra). A mérési zajokat szintén kombinált vektorukkal fogjuk leírni:

$$\underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} \quad (3-6.)$$

Ezzel a mérések kombinált $\tilde{\underline{x}}(t)$ vektora

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) + \underline{\xi}(t) \quad (3-7.)$$

alakban írható fel. A mérési zajokról feltételezzük, hogy

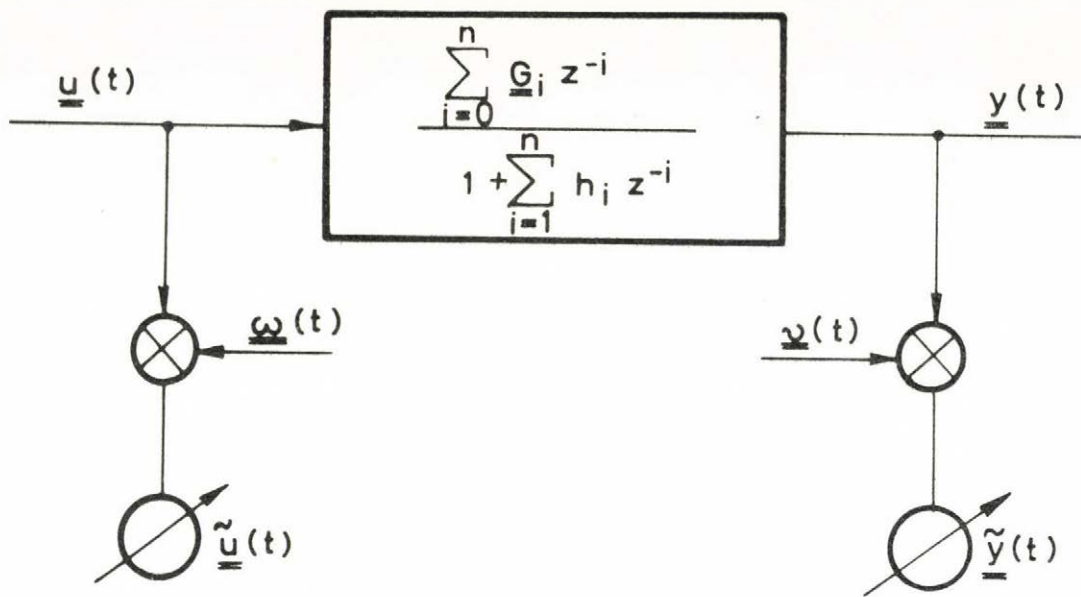
- stacionáriusak
- időben korrelálatlanok
- függetlenek a bemenő (és kimenő) változóktól
- várható értékük zérus

továbbá hogy ismert a zérus eltoláshoz tartozó

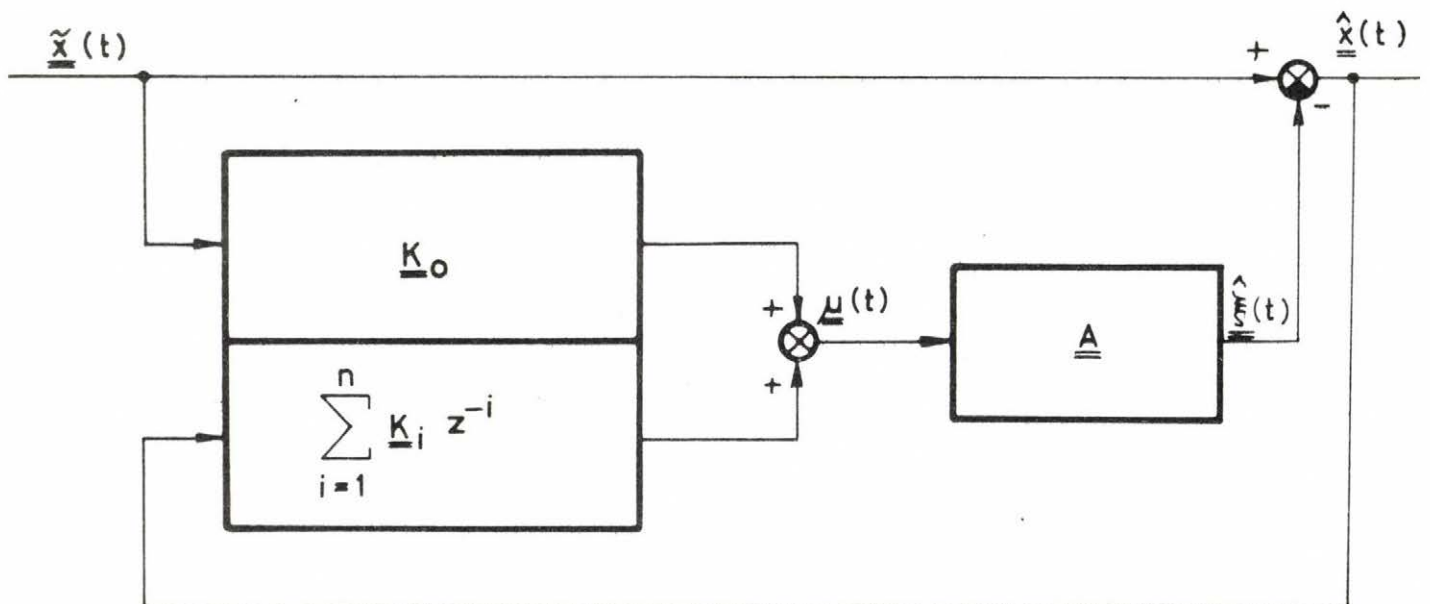
$$\underline{P}_{\xi} = \underline{P}_{\xi\xi}(0) = E\{\underline{\xi}(t) \underline{\xi}^T(t)\} \quad (3-8.)$$

korrelációs (kovariancia) mátrixuk. (Itt \underline{P}_{ξ} rövidített jelölés; a továbbiakban ezt fogjuk használni.)

Feladatunk a $\underline{x}(t)$ változó-vektor becslése. A becsült $\hat{\underline{x}}(t)$ változóknak minimalizálniuk kell a mérési zajok szórásaival súlyozott MV jósági indexet, és egyidejűleg ki kell elégíteniük a rendszeregyenletet. A zajok kovariancia mátrixával súlyozott MV



3.1. ábra.



3.2. ábra.

jósági index az alábbi módon írható fel:

$$Q = E\{[\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]\} \quad (3-9.)$$

Ha a zajok egymástól függetlenek, a \underline{P}_{ξ} mátrix diagonális, és a jósági index úgy is felírható, hogy

$$Q = E\left\{ \sum_{i=1}^{k+m} \frac{(\hat{x}_i - x_i)^2}{p_{ii}} \right\} \quad (3-10.)$$

ahol p_{ii} ($i=1 \dots k+m$) a \underline{P}_{ξ} mátrix i -edik főátlós eleme. A becslésekre vonatkozó rendszeregyenlet (3-4.) alapján:

$$\sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \hat{\underline{x}}(t) = \underline{0} \quad (3-11.)$$

Feladatunk tehát most már úgy fogalmazható meg, hogy keressük az $\underline{x}(t)$ változók azon $\hat{\underline{x}}(t)$ becslését, amely minimalizálja a (3-9.) kvadratikus jósági indexet a (3-11.) lineáris egyenlőség-korlát kielégítése mellett.

3.3. A szűrő alapegyenletei

A szűrő strukturájának, alapegyenleteinek meghatározásában a statikus anyagmérleg algoritmus gondolatmenetéből fogunk kiindulni.

Valamely mintavételt követően a rendelkezésünkre álló legjobb információ a pillanatnyi változó-értékek mérése és a korábbi változó-értékek becslése. Ez az érték-összeállítás általában nem elégíti ki a rendszeregyenletet, egyrészt mert a pillanatnyi mérések zajosak, másrészt mert a korábbi becslések meghatározásakor a rendszeregyenletben mindig más-más összeállítások szerepeltek. Így a pillanatnyi legjobb információ a rendszeregyenletbe helyettesítve egy egyenlet-hibát (egyensúly-hibát) ad:

$$\underline{u}(t) = \underline{K}_0 \tilde{\underline{x}}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \hat{\underline{x}}(t) \quad (3-12.)$$

Ezt az egyenlet-hibát fogjuk szétosztani a változók pillanatnyi értékei között oly módon, hogy a változók mérését egy $\hat{\underline{\xi}}(t)$ mennyiséggel korrigáljuk

$$\hat{\underline{x}}(t) = \tilde{\underline{x}}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t) \quad (3-13.)$$

és a változók korrekcióját az egyenlet-hiba lineáris függvényeként állítjuk elő

$$\underline{\hat{x}}(t) = \underline{A} \underline{u}(t) \quad (3-14.)$$

Itt \underline{A} az egyelőre ismeretlen $(k+m) \times m$ méretű állandó szűrő-mátrix. A változók korrekcióját - a statikus algoritmust követve - formálisan a mérési zajok becsléseként jelöljük, bár ez most nem teljesen helytálló, mivel az egyenlet-hiba létrehozásában nemcsak a pillanatnyi mérési zajok játszanak szerepet. A (3-12.), (3-13.) és (3-14.) összefüggésekkel definiált szűrő-strukturát a 3-2. ábra szemlélteti.

A (3-12.), (3-13.) és (3-14.) összefüggések segítségével az alapvető (3-9.) és (3-11.) egyenletek a további felhasználásra alkalmasabb formába hozhatók.

Jelölje $\underline{\psi}(t)$ a változók becslési hibáját. A (3-13.) és (3-7.) egyenletekből

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\hat{x}}(t) - \underline{x}(t) = \underline{\xi}(t) - \underline{\hat{x}}(t) \quad (3-15.)$$

Ezzel az MV jósaági index

$$Q = E\{\underline{\psi}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{\psi}(t)\} = E\{[\underline{\xi}(t) - \underline{\hat{x}}(t)]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\underline{\xi}(t) - \underline{\hat{x}}(t)]\} \quad (3-16.)$$

Másrészt a (3-12.) definíció behelyettesítésével a (3-11.) korlát úgy is írható, hogy

$$\underline{u}(t) + \underline{K}_0 [\underline{\hat{x}}(t) - \underline{\tilde{x}}(t)] = \underline{0} \quad (3-17.)$$

kell hogy legyen. A (3-13.) egyenlet alapján ez tovább alakítható:

$$\underline{u}(t) - \underline{K}_0 \underline{\hat{x}}(t) = \underline{0} \quad (3-18.)$$

Miután a t pillanatban a $\underline{u}(t)$ egyenlet-hiba adott, a $\underline{\hat{x}}(t)$ korrekciót kell - a rendszeregyenlet kielégítése érdekében - (3-18.)-nak megfelelően megválasztani. Ha ez utóbbi eredményt tovább írjuk a (3-14.) definíció segítségével a következőképpen:

$$\underline{u}(t) - \underline{K}_0 \underline{A} \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (3-19.)$$

és figyelembe vesszük, hogy ez utóbbi egyenletnek bármilyen $\underline{u}(t)$ egyenlet-hibára teljesülnie kell, akkor

$$\underline{K}_0 \underline{A} = \underline{I} \quad (3-20.)$$

alakban az \underline{A} szűrő-mátrixra vonatkozólag is megkapjuk a rendszeregyenlet kielégítésének feltételét.

A (3-12.), (3-13.) és (3-14.) egyenletekkel definiált struktúrával kapcsolatban meg kell még jegyezni a következőt. Ez a struktúra biztosítja a szűrő rekurzivitását: minden mintavételt követően csak a pillanatnyi változó-értékeket becsüljük. Lehetséges lenne az egyenlet-hiba számításában a korábbi változó értékeket is mérésükkel (és nem becslésükkel) venni figyelembe és minden mintavételt követően nemcsak a pillanatnyi, hanem az n előző változó-értéket is becsülni. Ez az algoritmus nem lenne rekurzív, ami stabilitás szempontjából előnyös. Viszont számítás-igénye lényegesen nagyobb lenne, és azzal a hátránnyal is járna, hogy az ugyanazon időponthoz tartozó változó-értékekre az egymásrakövetkező becslések általában más-más eredményt adnának. A szűrési folyamat indításakor viszont - amikor korábbi becslések még nem állnak rendelkezésre - az egyenlet-hiba számítását szükségszerűen a mérésekre kell alapozni; ezeket a méréseket aztán lépésről-lépésre a megfelelő becslések váltják fel.

3.4. A szűrő további tulajdonságai

Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk az egyenlet-hiba, a becslési korrekció és a becslési hiba viselkedését az előző alfejezetben definiált szűrő-struktúra mellett.

Induljunk ki az egyenlet-hiba (3-12.) definíciójából és helyettesítsük be a becslések (3-13.) kifejezését. Rendezés után:

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \tilde{\underline{x}}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \hat{\underline{x}}(t) \quad (3-21.)$$

Vegyük most figyelembe a (3-14.) kifejezést is:

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \tilde{\underline{x}}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \underline{u}(t) \quad (3-22.)$$

Megoldva az egyenlet-hibára:

$$\underline{u}(t) = [\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A}]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \tilde{\underline{x}}(t) \quad (3-23.)$$

E két utóbbi egyenlettel (a (3-22.)-vel rekurzív alakban, a (3-23.)-mal pedig diszkrét átviteli függvény formájában) megkaptuk annak a dinamikus rendszernek a leírását, amelynek a kimenő-jele az egyenlet-hiba, a bemenő-jele pedig a változók mérése (3-3.ábra). Ezek a leírások a (3-12.) definícióval egyenértékűek és egyaránt használhatók az egyenlet-hiba gyakorlati kiszámítására. A (3-23.) egyenletből - a (3-14) összefüggés felhasználásával - a becslési korrekciók is felírhatók a változók mérésének függvényeként:

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{A} \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \tilde{\underline{x}}(t) \quad (3-24.)$$

A (3-23.) és (3-24.) egyenletekben a második szumma átirható a (3-7.) összefüggés segítségével:

$$\sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \tilde{\underline{x}}(t) = \underbrace{\sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{x}(t)}_{\underline{0}} + \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{\xi}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{\xi}(t) \quad (3-25.)$$

Itt felhasználtuk, hogy a valódi változók kielégítik a rendszer-egyenletet. Eszerint a (3-23.) és (3-24.) egyenletekben a változók mérése egyszerűen a zajvektorral helyettesíthető:

$$\underline{u}(t) = \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{\xi}(t) \quad (3-26.)$$

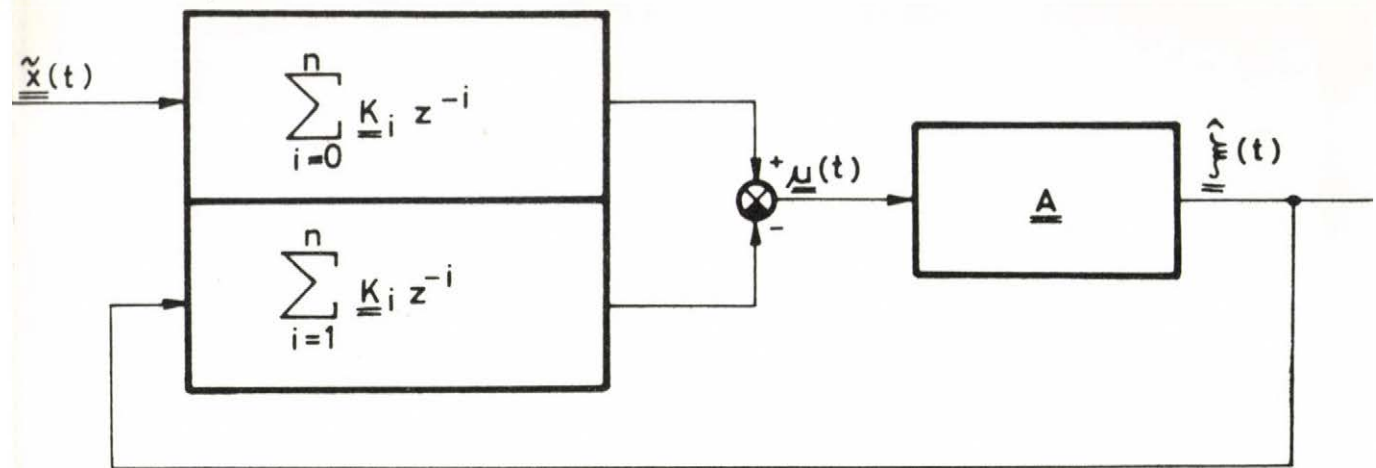
$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{A} \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{\xi}(t) \quad (3-27.)$$

A (3-27.) egyenletből - a (3-15.) összefüggés segítségével - a becslési hiba is felírható:

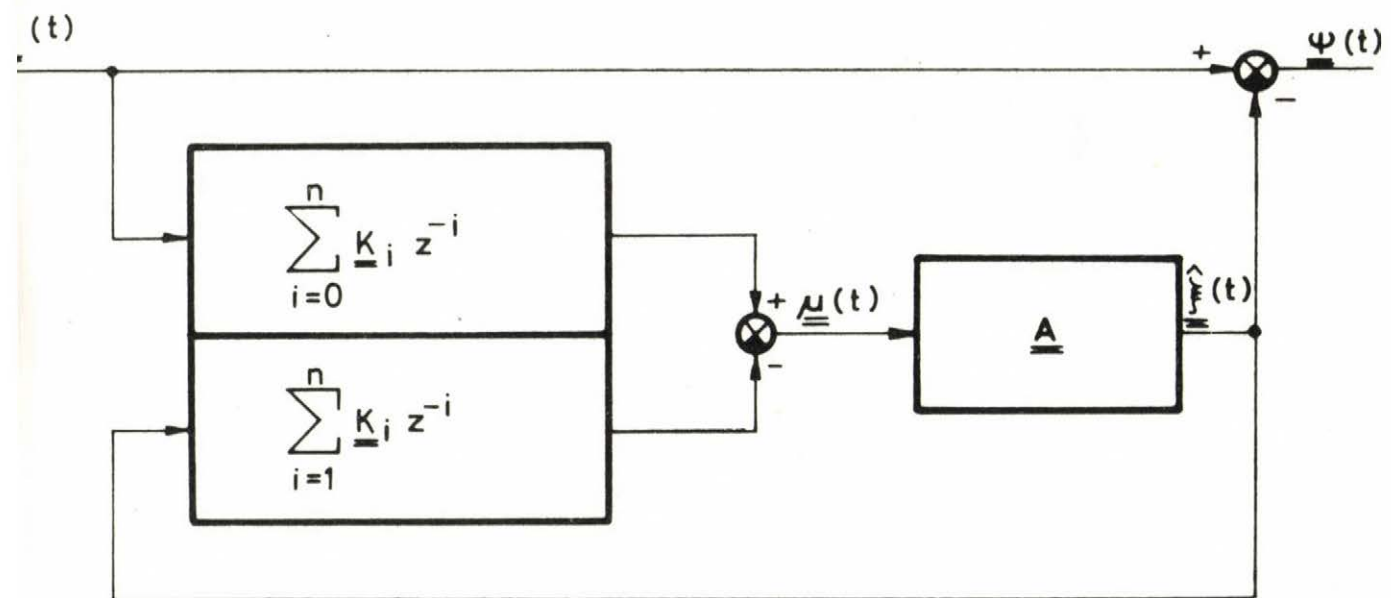
$$\underline{\psi}(t) = \left[\underline{I} - \underline{A} \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \right] \underline{\xi}(t) \quad (3-28.)$$

Ez utóbbi három egyenlet egy olyan dinamikus rendszer leírása, amelynek kimenő-jelei az egyenlet-hiba, a becslési korrekció és a becslési hiba, bemenő-jele pedig a mérési zaj (3-4.ábra). Ezek az egyenletek gyakorlati számításokra nem alkalmasak, mivel bemenő-jelük nem mérhető, de elméletileg jelentősek, mert betekintést nyújtanak a szűrő tulajdonságaiba.

A levezetés sorrendjének módosításával egy alternatív leírás-



3.3. ábra.



3.4. ábra.

rendszerhez juthatunk. Irjuk fel a becslési korrekciót az egyenlet-hiba (3-21.)-beli alakjának felhasználásával:

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{A} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \tilde{\underline{x}}(t) - \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \hat{\underline{x}}(t) \quad (3-29.)$$

Megoldva a becslési korrekcióra:

$$\hat{\underline{x}}(t) = [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} \underline{A} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \tilde{\underline{x}}(t) \quad (3-30.)$$

Itt ismét helyettesíthetjük a változók mérését a mérési zajjal:

$$\hat{\underline{x}}(t) = [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} \underline{A} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{x}(t) \quad (3-31.)$$

Minthogy

$$\underline{A} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} = \underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} + \underline{A} \underline{K}_0 - \underline{I} \quad (3-32.)$$

a (3-31.) egyenlet tovább írható:

$$\hat{\underline{x}}(t) = [\underline{I} - [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0)] \underline{x}(t) \quad (3-33.)$$

Végül a becslési hiba:

$$\underline{\psi}(t) = [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0) \underline{x}(t) \quad (3-34.)$$

A (3-33.) illetve (3-34.) egyenletek a (3-27.) illetve (3-28.) formákkal egyenértékűek. Az azonosságot formálisan, mátrix-algebrai átalakításokkal is bebizonyítjuk a Függelék 5.pontjában.

A fentiekben levezetett formulák - az 1.Függelékben bemutatott átírási szabályokat követve - a szokásos átviteli függvény alakra is átalakíthatók. Például az egyenlet-hibára:

$$\underline{\psi}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{nm} \underline{\Gamma}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{nm} \eta_i z^{-i}} \underline{x}(t) \quad (3-35.)$$

A becslési korrekcióra és becslési hibára is hasonló átviteli függvények írhatók fel: a polinomok fokszáma és a nevező együtthatói a (3-35.) formuláéval azonosak, csupán a számláló mátrix-együtthatói különbözőek a három esetben. A (3-35.) egyenletből kiolvasható legfontosabb információ az, hogy a szűrő nm -edrendű folytonos-diszkrét lineáris dinamikus rendszer. Az 5.Függelékben

egyébként azt is megmutatjuk, hogy az egyenértékű leírások - természetesen - azonos fokszámu átviteli függvényekre vezetnek.

A (3-28.) illetve az egyenértékű (3-34.) egyenlet a szűrő rendkívül fontos tulajdonságára világít rá: arra, hogy a becslési hiba csak a mérési zajtól függ. Ebből egyrészt az következik, hogy az MV jósaági index nem függ a rendszerváltozók jellemzőitől, hanem a mérési zaj paramétereivel teljesen leírható. Másrészt a becslési hiba várható értéke a mérési zaj várható értékével arányos; például a (3-34.) egyenletből:

$$E\{\underline{\psi}(t)\} = [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i]^{-1} (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0) E\{\underline{\xi}(t)\} \quad (3-36.)$$

Amennyiben a mérési zaj zérus várható értékű - ahogy feltételeztük -, a becslés torzítatlan. A becslés torzítatlansága ki- zárólag a szűrő strukturájából következik és független az \underline{A} szűrő-mátrix értékétől.

3.5. Általános lineáris struktura

Az eddigiekben egy speciális lineáris szűrő-strukturával foglalkoztunk. Kereshetnénk feladatunk megoldását az általános n -edrendű rekurzív lineáris dinamikus strukturában is, az alábbiak szerint:

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{B}_0 \tilde{\underline{x}}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{B}_i z^{-i} \hat{\underline{x}}(t) \quad (3-37.)$$

Itt a \underline{B}_i ($i=0\dots n$) szűrő-mátrixok állandóak és $(k+m) \times (k+m)$ méretűek.

Természetesen az anyagmérleg-szűrő is leírható az általános strukturában; ekkor speciálisan

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 &= \underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0 \\ \underline{B}_i &= -\underline{A} \underline{K}_i \quad i=1\dots n \end{aligned} \quad (3-38.)$$

Láthatóan az anyagmérleg-struktura megszorítást jelent az általános lineáris strukturához képest, ami potenciálisan a speciális struktura szuboptimalitását is magában hordozza. Ennek azonnal szembe- tünő ellentétele az, hogy az anyagmérleg-struktura

egyetlen $(k+m) \times m$ méretű szűrő-mátrixot igényel az általános struktúra $n+1$ számú $(k+m) \times (k+m)$ méretű mátrixával szemben.

További, a fentínél is lényegesebb megállapításra juthatunk a becslési hiba elemzése útján. Felhasználva, hogy $\hat{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) + \underline{\psi}(t)$ és $\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) + \underline{\xi}(t)$, a becslési hiba az általános struktúrában a (3-37.) egyenlet alapján így írható:

$$\underline{\psi}(t) = \underline{B}_0 \underline{\xi}(t) + (\underline{B}_0 - \underline{I}) \underline{x}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{B}_i z^{-i} \underline{x}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{B}_i z^{-i} \underline{\psi}(t) \quad (3-39.)$$

Láthatóan a becslési hiba függ a rendszer-változók valódi értékétől. Ez igen kedvezőtlen, egyrészt mivel így a becslés általában torzított, másrészt mert az MV jósaági index és így az optimális szűrő-mátrix nem független a rendszer-változóktól. Gyakorlatilag csak olyan szűrőt célszerű tehát használni, amelynél a rendszer-változók a becslési hiba kifejezésében nincsenek jelen. Mármint ha a \underline{B}_i szűrő-mátrixokat speciális módon, mégpedig éppen a (3-38.) összefüggés szerint választjuk meg, akkor

$$(\underline{B}_0 - \underline{I}) \underline{x}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{B}_i z^{-i} \underline{x}(t) = - \underline{A} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (3.40.)$$

Az anyagmérleg-struktúra tehát éppen az a megszorítás az általános lineáris struktúrával szemben, amely biztosítja, hogy a becslési hiba független legyen a valódi rendszer-változóktól.

3.6. Elemi rendszer

A 3. fejezetben eddig mondottak szemléltetésére tekintsünk egy egyszerű folytonos-diszkrét lineáris rendszert. Legyen $k = m = n = 1$, és legyen a rendszer átviteli függvénye

$$W(z) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 + h_1 z^{-1}} \quad (3-41.)$$

Ez a rendszer például az egytárolós folytonos dinamikus tag diszkrét leírása lehet a bemenőjel trapéz közelítése mellett.

Az átviteli függvénnyel egyenértékű rendszer-egyenlet

$$y(t) = g_0 u(t) + g_1 z^{-1} u(t) - h_1 z^{-1} y(t) \quad (3-42.)$$

illetve nullára rendezve

$$g_0 u(t) + g_1 z^{-1} u(t) - y(t) - h_1 z^{-1} y(t) = 0 \quad (3-43.)$$

A rendszer-változók illetve a mérési zaj vektora most

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (3-44.)$$

a rendszer-mátrixok pedig

$$\underline{K}_0 = [g_0 \quad -1] \quad \underline{K}_1 = [g_1 \quad -h_1] \quad (3-45.)$$

A szűrő-mátrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3-46.)$$

alaku lesz. Az egyenlet-hiba a (3-12.) képlet szerint

$$\mu(t) = g_0 \tilde{u}(t) - \tilde{y}(t) + g_1 z^{-1} \hat{u}(t) - h_1 z^{-1} \hat{y}(t) \quad (3-47.)$$

a becslési korrekció pedig a (3-14.) képletből

$$\underline{\hat{\xi}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\omega}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \mu(t) \quad (3-48.)$$

Az egyenlőség-korlát (3-18.) szerinti alakja most

$$\mu(t) - g_0 \hat{\omega}(t) + \hat{v}(t) = 0 \quad (3-49.)$$

a (3-20.) szerinti alak pedig

$$a_1 g_0 - a_2 = 1 \quad (3-50.)$$

Az egyenlet-hiba (3-26.) szerinti leírása

$$\mu(t) = \frac{[g_0 \quad -1] + [g_1 \quad -h_1] z^{-1}}{1 + (a_1 g_1 - a_2 h_1) z^{-1}} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (3-51.)$$

Ebből a korrekció (3-27.) szerint

$$\underline{\hat{\xi}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\omega}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} a_1 g_0 & -a_1 \\ a_2 g_0 & -a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 g_1 & -a_1 h_1 \\ a_2 g_1 & -a_2 h_1 \end{bmatrix} z^{-1}}{1 + (a_1 g_1 - a_2 h_1) z^{-1}} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (3-52.)$$

a becslési hiba pedig (3-28.) szerint

$$\underline{\psi}(t) = \frac{\begin{bmatrix} 1-a_1g_0 & a_1 \\ -a_2g_0 & 1+a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_2h_1 & a_1h_1 \\ -a_2g_1 & a_1g_1 \end{bmatrix} z^{-1}}{1 + (a_1g_1 - a_2h_1)z^{-1}} \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (3-53.)$$

4. AZ OPTIMÁLIS SZÜRŐ-MÁTRIX

4.1. Bevezetés

Az előző fejezetben rögzítettük a szűrő-tervezés feltételeit és definiáltuk azt a speciális lineáris struktúrát, amelyben a szűrőt realizálni kívánjuk. A szűrő tervezése most már azt jelenti, hogy meg kell határozni - ezen feltételeken és struktúrán belül - a valamely adott rendszerhez tartozó legjobb szűrő-mátrixot. Kikötésünk értelmében ennek a szűrő-mátrixnak egy súlyozott MV jósági indexet kell minimalizálnia egy egyenlőség-korlát egyidejű kielégítése mellett.

A következőkben először rámutatunk egy alapvető összefüggésre, amely - a választott struktúra mellett - az MV és LN jósági index között fennáll. Ezután módszert adunk a jósági index értékének kiszámítására. A továbbiakban megvizsgáljuk az optimális szűrő-mátrix meghatározásának lehetőségeit, majd - ennek nehézségei miatt - egy szuboptimális megközelítést is javasolunk. Bemutatjuk a szűrési feladat egy triviális megoldását és megvizsgáljuk a szűrés nélküli esetet is. Végül megadjuk a jósági index alsó korlátját, majd elemezzük az optimális, szuboptimális és triviális szűrő határérték-tulajdonságait.

4.2. Összefüggés az MV és LN jósági index között

Az előző fejezet (3-9.) képletében egy súlyozott MV jósági indexet definiáltunk:

$$Q = E\{[\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)]\} \quad (4-1.)$$

Definiáljunk most egy súlyozott LN jósági indexet is:

$$R = E\{[\hat{\underline{x}}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\hat{\underline{x}}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)]\} \quad (4-2.)$$

A (3-16.) összefüggésben megmutattuk, hogy az MV jósági index - a választott struktúra mellett - így is írható:

$$Q = E\{\underline{\psi}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{\psi}(t)\} = E\{[\underline{\xi}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t)]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\underline{\xi}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t)]\} \quad (4-3.)$$

Hasonló módon az LN jósági indexet is átírhatjuk a (3-13.)

képlet segítségével:

$$R = E\{\hat{\underline{\xi}}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} \quad (4-4.)$$

A következőkben megvizsgáljuk, milyen összefüggés áll fenn a két jósági index között. Ehhez először fejtsük ki az MV index (4-3.) szerinti alakját:

$$Q = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{\xi}(t)\} - 2E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} + E\{\hat{\underline{\xi}}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} \quad (4-5.)$$

(Itt a második tagban kihasználtuk $\underline{P}_{\underline{\xi}}$ szimmetriáját, valamint azt a tényt, hogy egy skalár azonos a transzponáltjával.)

Fejtsük most tovább ki a második tagot. (3-31.) felhasználásával:

$$\begin{aligned} E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} &= E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{A} \left[\sum_{i=0}^n \underline{K}_i \underline{\xi}(t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i \hat{\underline{\xi}}(t-i\Delta t) \right]\} = \\ &= \sum_{i=0}^n E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{A} \underline{K}_i \underline{\xi}(t-i\Delta t)\} - \sum_{i=1}^n E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{A} \underline{K}_i \hat{\underline{\xi}}(t-i\Delta t)\} \quad (4-6.) \end{aligned}$$

A $\underline{\xi}(t)$ mérési zaj - feltevésünk értelmében - korrelálatlan saját korábbi értékeivel. Ebből az is következik, hogy korrelálatlan a belőle rekurzive származtatott $\hat{\underline{\xi}}(t)$ korrekció korábbi értékeivel is. Mindezek alapján a (4-6.) egyenlet az alábbi formára egyszerűsödik:

$$E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{A} \underline{K}_0 \underline{\xi}(t)\} \quad (4-7.)$$

Ezzel a (4-5.) egyenlet:

$$Q = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{\xi}(t)\} - 2E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{A} \underline{K}_0 \underline{\xi}(t)\} + E\{\hat{\underline{\xi}}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} \quad (4-8.)$$

A (4-8.) egyenlet utolsó tagja éppen R , az első illetve második tagjára pedig - a 6. Függelék (F6-3.) illetve (F6-2.) és (F6-4.) képletei szerint - fennáll a következő:

$$E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{\xi}(t)\} = k + m \quad (4-9.)$$

$$E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{A} \underline{K}_0 \underline{\xi}(t)\} = \text{tr}(\underline{K}_0 \underline{A}) \quad (4-10.)$$

Ezzel

$$Q = R + k+m - 2\text{tr}(\underline{K}_0 \underline{A}) \quad (4-11.)$$

Ha most az \underline{A} szűrő-mátrixra teljesül a (3-20.) korlát, vagyis $\underline{K}_0 \underline{A} = \underline{I}$, ahol \underline{I} $m \times m$ méretű egységmátrix, akkor

$$\text{tr}(\underline{K}_0 \underline{A}) = m \quad (4-12.)$$

és ezzel

$$Q = R + k - m \quad (4-13.)$$

A (4-13.) összefüggés tehát azt mondja ki, hogy a választott struktúra és az egyenlőség-korlát kielégítése esetén a súlyozott MV és LN jósági indexek csak egy állandóval (a be-
menetek és kimenetek számának különbségével) térnek el egymástól. Ebből következik, hogy az egyenlőség-korlátot kielé-
gitő optimális szűrő-mátrix ugyanaz, akár a súlyozott MV in-
dexre, akár pedig a súlyozott LN indexre minimalizálunk. Ez
nemcsak elméleti szempontból lényeges, hanem gyakorlati ha-
szonnal is jár, mivel az LN indexszel sok esetben egyszerűbb
számolni, mint az MV indexszel.

A (4-13.) összefüggés egy további lényeges következménye,
hogy lehetővé teszi az MV jósági index kísérleti meghatározá-
sát. Egy konkrét (nem szimulált) szűrési folyamat során ugyan-
is a becslési korrekciók számértéke ismert, a becslési eltéré-
seké azonban nem. A becslési korrekciók értéksorozata alapján az
LN jósági index - és ezzel az MV index is - kísérletileg meg-
határozható (várható érték helyett átlag-képzéssel).

4.3. A jósági index értékének analitikus meghatározása

A jósági index értékének analitikus meghatározása nem trivi-
ális feladat. Megoldására a Függelék 7. és 8. pontjában vezetünk
le módszert. A következőkben ennek eredményeit fogjuk összefog-
lalni. Az összefüggéseket az LN indexre nézve fogjuk felírni,
azok azonban értelemszerűen érvényesek az MV indexre is.

A számításhoz a becslési korrekció átviteli függvény alaku-
leírásából kell kiindulni. Ez a (3-35.) egyenlet mintájára az
alábbi módon írható:

$$\hat{\underline{x}}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{nm} \underline{\Gamma}'_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{nm} \eta_i z^{-i}} \underline{\xi}(t) \quad (4-14.)$$

A $\underline{\Gamma}'_i$ mátrixok és η_i skalárok ($i=0\dots nm$; $\eta_0=1$) például a (3-27.) egyenletből meghatározhatók:

$$\frac{\sum_{i=0}^{nm} \underline{\Gamma}'_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{nm} \eta_i z^{-i}} = \underline{A} [\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A}]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \quad (4-15.)$$

Tegyük fel, hogy a (4-14.) illetve (4-15.) egyenletekkel leírt rendszer stabilis (lásd az 5. Fejezetet); a bemutatandó összefüggések instabil rendszerekre nem érvényesek.

Az η_i skalárokból képezzük az alábbi mátrixokat:

$$\underline{H}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_2 & \eta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_{nm} & \eta_{nm-1} & \dots & \eta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-16.)$$

$$\underline{H}_F = \begin{bmatrix} 0 & \eta_1 & \dots & \eta_{nm-1} & \eta_{nm} \\ 0 & \eta_2 & \dots & \eta_{nm} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \eta_{nm} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-17.)$$

$$\underline{E} = (\underline{I} + \underline{H}_A)^{-1} \quad (4-18.)$$

$$\underline{F} = (\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F)^{-1} \quad (4-19.)$$

Ezekkel az LN jósági index a következőképpen írható fel:

$$R = E \{ \underline{\xi}^T(t) \left[\sum_{i=0}^{nm} \sum_{j=i}^{nm} \sum_{\ell=0}^{nm} f_{oi} e_{(j-i)\ell} \underline{\Gamma}'_j^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{\Gamma}'_{\ell} \right] \underline{\xi}(t) \} \quad (4-20.)$$

ahol f_{oi} és $e_{(j-i)\ell}$ az \underline{F} és \underline{E} mátrixok megfelelő elemei.

A (4-20.) összefüggés még számolásra közvetlenül nem alkalmas. A szögletes zárójelben lévő hármas szumma egy mátrixot ad;

jelöljük ezt \underline{S} -sel. Így a (4-20.) összefüggés átírható az alábbi formulába:

$$R = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{S} \underline{\xi}(t)\} = \sum_{i=1}^{k+m} \sum_{j=1}^{k+m} s_{ij} p_{ij} \quad (4-21.)$$

ahol az s_{ij} illetve p_{ij} együtthatók az \underline{S} illetve \underline{P}_{ξ} mátrixok megfelelő elemei.

A fentiekből egyébként következik, hogy a jósági index invariáns a teljes zaj-vektor állandóval való szorzására, feltéve hogy a szűrő-mátrix (és ezen keresztül a $\underline{\Gamma}'_i$ mátrixok) nem függenek ettől az állandótól. Ha ugyanis $\underline{\xi}^+(t) = c \underline{\xi}(t)$, akkor $\underline{P}_{\xi^+} = c^2 \underline{P}_{\xi}$ és $\underline{P}_{\xi^+}^{-1} = 1/c^2 \underline{P}_{\xi}^{-1}$, ezzel $\underline{S}^+ = 1/c^2 \underline{S}$ és $R^+ = R$.

Megjegyezzük még, hogy a Kalman-szűrőnél követett rekurzív megközelítés a jósági index meghatározására esetünkben kevésbé lenne célravezető a szűrő-egyenlet magas fokszáma (nagymélységű rekurzivitása) miatt.

4.4. Az optimális szűrő-mátrix meghatározása

Miután a jósági indexre nézve zárt analitikus kifejezés áll rendelkezésünkre, elvileg lehetséges lenne az optimális szűrő-mátrix analitikus meghatározása. Ekkor a jósági indexet a szűrő-mátrix függvényeként kellene felírni, majd ezt a függvényt formálisan deriválni a szűrő-mátrix szerint. A 4.3. alfejezet összefüggései azonban világosan mutatják, hogy a jósági index rendkívül bonyolult módon függ a szűrő-mátrixtól, ezért az analitikus megközelítés nem járható. Lehetőség van viszont az optimális szűrő-mátrix numerikus meghatározására kereső algoritmus segítségével.

A kereső algoritmus következő vázlatos leírásában néhány olyan fogalmat is használunk, amelyeket csak később fogunk bevezetni; ezekkel kapcsolatban utalunk a megfelelő fejezetekre.

A keresés során az \underline{A} szűrő-mátrix elemeinek értékét variáljuk numerikusan. Minden figyelembe vett szűrő-mátrixnak ki kell elégítenie a (3-20.) képletben megfogalmazott egyenlőség-korlátot. Ennek biztosítása érdekében célszerű az \underline{A} mátrixot felbontani a következő módon:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_u \\ \underline{\underline{A}}_y \end{bmatrix} \quad (4-22.)$$

ahol az $\underline{\underline{A}}_u$ almátrix kxm méretű, az $\underline{\underline{A}}_y$ almátrix pedig mxm méretű kvadratikus. Ezzel a (3-20.) összefüggés úgy írható, hogy

$$\underline{\underline{K}}_0 \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_0 & -\underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_u \\ \underline{\underline{A}}_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{G}}_0 \underline{\underline{A}}_u - \underline{\underline{A}}_y = \underline{\underline{I}} \quad (4-23.)$$

Ez az egyenlet megoldható $\underline{\underline{A}}_y$ -ra:

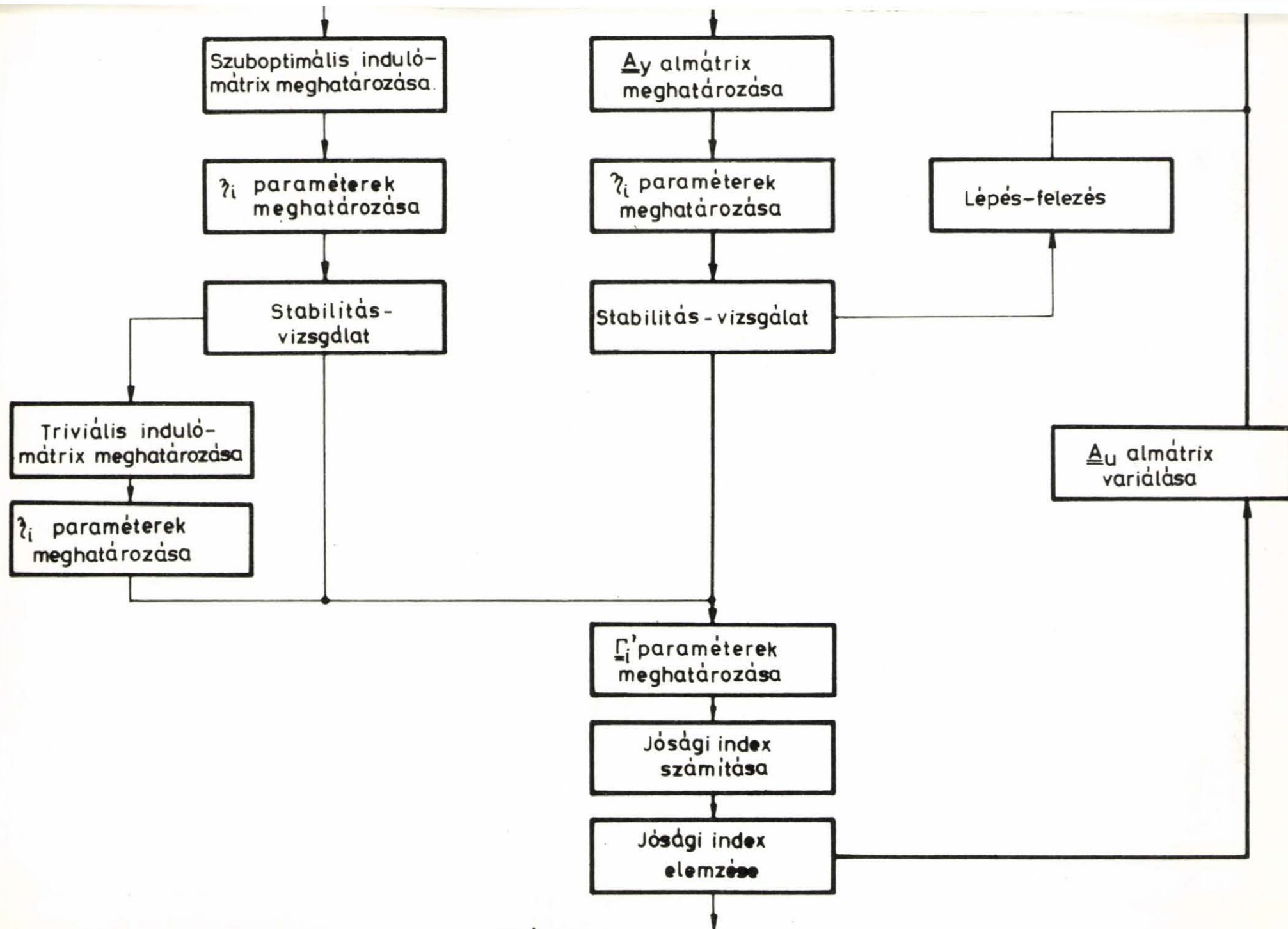
$$\underline{\underline{A}}_y = \underline{\underline{G}}_0 \underline{\underline{A}}_u - \underline{\underline{I}} \quad (4-24.)$$

Tehát az $\underline{\underline{A}}_u$ almátrix szabadon variálható, az $\underline{\underline{A}}_y$ almátrixot pedig - az egyenlőség-korlát teljesítése érdekében - a (4-24.) egyenletből kell meghatározni. Ennek megfelelően az optimalizálandó (variálandó) skalár-paraméterek száma az $\underline{\underline{A}}_u$ almátrix mérete, vagyis kxm.

A keresés minden egyes lépésében a fentiek szerint előállított $\underline{\underline{A}}$ mátrixszal meg kell határozni az η_i polinom együtthatókat a (4-15.) összefüggés alapján. Ezek birtokában stabilitás-vizsgálatot (lásd 5.fejezet) kell végezni. Ha a szűrő instabil, a legutóbbi keresési lépés felezésével új $\underline{\underline{A}}$ mátrixot kell előállítani, ezzel megismételni az η_i együtthatók kiszámítását és a stabilitás-vizsgálatot. Amikor stabil szűrő-mátrixhoz jutunk, ezzel meg kell határozni a (4-15.) összefüggésben definiált $\underline{\underline{\Gamma}}_i$ együtthatókat, majd - a 4.3.alfejezetben leírt módon - a jósági index értékét. Ez utóbbi elemzése útján dönti el aztán a kereső algoritmus, hogy milyen módon kell a szűrő-mátrixot tovább variálni.

A keresést a szuboptimális szűrő-mátrixból (lásd 4.5.alfejezet) célszerű indítani. Ennek is meg kell azonban vizsgálni a stabilitását, és amennyiben instabilnak bizonyul, akkor helyette a triviális szűrő-mátrixból (lásd 4.6.alfejezet) kell kiindulni.

A kereső algoritmus tömbvázlatát a 4.1.ábra mutatja. Az algoritmus realizációs kérdéseire a 9.Fejezetben még visszatérünk és ugyanitt mutatunk be néhány - az algoritmus illetve az azon alapuló program segítségével nyert - numerikus eredményt.



4-1. ábra.

Megjegyzendő, hogy mivel az \underline{R} függvény az \underline{A}_u mátrix elemeinek terében invariáns a \underline{P}_ξ mátrix $c^2 \underline{P}_\xi$ nyújtására és \underline{P}_ξ az egyenlőség-korlátban nem szerepel, az optimális szűrő-mátrix is invariáns lesz c^2 -re nézve.

4.5. Szuboptimális szűrő-mátrix

Amint azt a 4.4. alfejezetben láttuk, az optimális szűrő-mátrix meghatározása bonyolult, numerikus gépi számításokat igénylő feladat. Célszerű ezért valami olyan közelítő megoldást keresni, amely a valódi optimumhoz várhatóan közel esik, és amely egyszerű módon meghatározható. Ez a közelítő, szuboptimális szűrő-mátrix helyettesítheti az optimális mátrixot, ha annak kiszámítására nincs gyakorlatilag lehetőség, vagy szolgálhat a valódi optimum megkeresését célzó numerikus számítások kiindulásaként.

A szuboptimális szűrő-mátrixot egy célszerű közelítő feltevés alapján fogjuk származtatni, nevezetesen hogy a $\underline{u}(t)$ egyenlet-hiba nem függ az \underline{A} szűrő-mátrixtól. Ez a feltevés a legegyszerűbb esetben egy olyan szűrőnek felel meg, amelynek bemenő-jele egy adott $\underline{u}(t)$ egyenlet-hiba (4-2. ábra). Természetesen ez a szűrő a 3.4. ábra szerinti valódi szűrő-strukturának általában csak közelítése. A továbbiakban a fenti közelítő feltevés két konkrétabb speciális esetére is ki fogunk térni.

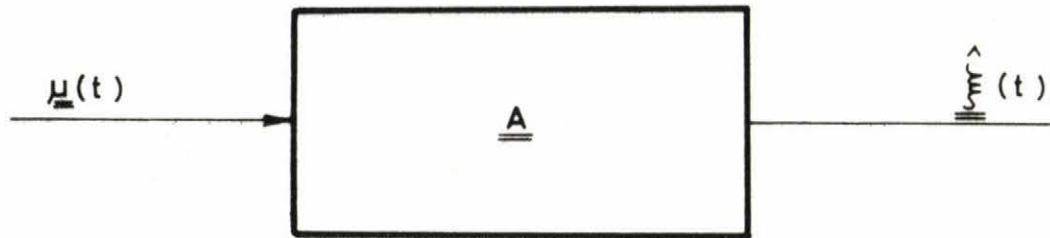
Tekintsük az LN jósági indexet; a 4.2. alfejezetben megmutattuk, hogy ez a vizsgált feltételek között egyenértékű az MV indexszel. A (4-4.) egyenletből, figyelembe véve, hogy $\hat{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{u}(t)$,

$$R = E\{\underline{u}^T(t) \underline{A}^T \underline{P}_\xi^{-1} \underline{A} \underline{u}(t)\} \quad (4-25.)$$

Ha a $\underline{u}(t)$ egyenlet-hiba nem függ az \underline{A} mátrixtól, akkor az \underline{A} szerinti minimalizálás - az egyenlőség-korlátot is figyelembe véve - analitikusan elvégezhető. A levezetés részleteit a 9. Függelék tartalmazza. Az eredményül kapott szuboptimális szűrő-mátrix az alábbi:

$$\underline{A}_S = \underline{P}_\xi \underline{K}_O^T (\underline{K}_O \underline{P}_\xi \underline{K}_O^T)^{-1} \quad (4-26.)$$

Figyelemre méltó a szuboptimális megoldás egyszerűsége, valamint az a körülmény, hogy a szuboptimális szűrő-mátrix nem függ az



4.2. ábra



4.3. ábra.

egyenlet-hiba tulajdonságaitól (nevezetesen annak kovarianciamátrixától). Könnyen ellenőrizhető, hogy a (4-26.) megoldás kielégíti az egyenlőség-korlátot. Az is látható, hogy a szuboptimális mátrix invariáns \underline{P}_{ξ} nyújtására. A szuboptimális szűrő-mátrix létezésének feltétele, hogy a $\underline{K}_O \underline{P}_{\xi} \underline{K}_O^T$ mátrix invertálható legyen; ez általában teljesül, mivel az $m \times m$ méretű mátrix-szorzat rangját a tényezők rangja strukturálisan nem korlátozza.

A szűrő-mátrixtól független egyenlet-hibára vonatkozó közelítő feltevés egy speciális, konkrétan értelmezhető esete a következő. Tegyük fel, hogy a megelőző lépésekben a mérési zajok kiegyenlítése külön-külön tökéletes volt, s így az egyenlet-hiba csak a pillanatnyi zajtól függ

$$\underline{u}(t) = \underline{K}_O \underline{\xi}(t) \quad (4-27.)$$

Ez természetesen általában nem igaz, mert bár a kiegyenlítés minden lépésben megtörténik, az nemcsak a pillanatnyi zajra, hanem a zaj- és becslés-értékek egy súlyozott sorozatára együttesen vonatkozik; egy következő lépésben, eltolt együtthetőkkel ezek általában ismét nem adnak zérus-hibát. A (4-27.) feltevésnek megfelelő szűrőt a 4.3.ábra szemlélteti. Ekkor az LN jósági index

$$R_S = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{K}_O^T \underline{A}^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A} \underline{K}_O \underline{\xi}(t)\} \quad (4-28.)$$

(Ez a jósági index a valódi rendszerre nézve közelítő.) Miután a (4-25.) indexre történő optimalizálás eredménye - ha $\underline{u}(t)$ nem függ \underline{A} -tól - független $\underline{u}(t)$ konkrét alakjától, a (4-28.) speciális jósági indexet optimalizáló szűrő-mátrix azonos lesz a (4-26.) szerinti szuboptimális megoldással. A két eredmény azonossága egyébként a 9.Függelék levezetésében is végigkövethető, ha ott $\underline{u}(t) = \underline{K}_O \underline{\xi}(t)$ helyettesítéssel élünk.

A (4-27.) feltevés illetve az annak megfelelő 4-3.ábra szerinti rendszer visszavezet a 2.4.3.alfejezetben tárgyalt statikus anyagmérleg algoritmushoz. Így tehát a dinamikus szűrési probléma szuboptimális megoldása ugyanaz, mint a statikus probléma optimális megoldása; valóban: a (4-26.) és (2-46.) eredmények azonosak. Megjegyzendő még, hogy most a várható értékre vonatkozó LN index, korábban pedig a pillanatértékre vonatkozó LN

index minimalizálásával oldottuk meg a feladatot, tehát statikus illetve arra visszavezetett esetben ez a két megközelítés azonos eredményre vezet.

A szuboptimális szűrő-mátrix természetesen a várható értékre vonatkozó MV jósaági index alapján is levezethető, azonos eredménnyel. Figyelemre méltó, hogy a (4-27.) feltételezés mellett az egyenlőség-korlátot kielégítő optimum ekkor egyben a korlát nélküli, abszolút optimum is.

Az eddig mondottaknak van egy további igen fontos következménye is. Rekurzív szűrőkkel kapcsolatban szokásos magát a szűrő-tervezést is rekurzívan végezni, vagyis minden szűrési lépésben meghatározni a pillanatnyilag optimális szűrő-mátrixot. Ezt a megközelítést korábban már más megfontolásokból elvetettük (lásd a 3.1.alfejezetet); most megmutatjuk, hogy nem is lenne megvalósítható. Rekurzív szűrő-tervezés mellett ugyanis a pillanatnyi egyenlet-hiba a szűrő-mátrix korábbi értékeitől függ, de független a pillanatnyi szűrő-mátrixtól. Így a rekurzív szűrő-tervezés a jelen alfejezetben tárgyalt közelítő feltevés egy speciális konkrét realizációja. Márpedig ilyen körülmények között a szuboptimális szűrő-mátrixra jutunk, amely nem függ az egyenlet-hiba pillanatnyi tulajdonságaitól (kovarianciájától). A rekurzív tervezés tehát szuboptimális és főként állandó szűrő-mátrixra vezet, vagyis mint ilyen értelmetlen. Más szavakkal: ez a szűrő olyan természetű, hogy pillanatnyi statikus optimalizálásával kedvezőtlen egyenlet-hibát teremthetünk a következő szűrési lépések számára, és ezt a rekurzív tervezési technika - szintén a szűrő természetéből kifolyólag - nem tudja figyelembe venni.

Befejezésül megjegyezzük, hogy a szuboptimális szűrő-mátrix az esetek tulnyomó többségében igen jól megközelíti a valódi optimumot. Ezt a 9.Fejezetben számos numerikus példával fogjuk igazolni. A szuboptimális megoldás hátrányos tulajdonsága, hogy stabilitása nem garantált; erre bővebben az 5.Fejezetben fogunk kitérni.

4.6. Triviális szűrő

Lehetséges lenne a rendszeregyenletek kiegyenlítése úgy is, hogy a teljes egyenlet-hibát a kimenő-változókra osztjuk. Ezt különösen megkönnyíti, hogy a rendszer-egyenletek minden sorában csak egyetlen kimenő-változó szerepel. Így

$$\hat{\underline{u}}(t) = \underline{0} \quad \text{és} \quad \hat{\underline{y}}(t) = -\underline{u}(t) \quad (4-29.)$$

Ez a szűrési probléma triviális megoldása. Az ennek megfelelő szűrő-mátrix

$$\underline{A}_T = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{I} \end{bmatrix} \quad (4-30.)$$

A triviális megoldás természetesen kielégíti az egyenlőség-korlátot.

4.7. Szűrés nélküli eset

A teljesség kedvéért megemlítjük itt a szűrés nélküli esetet is. Ekkor $\hat{\underline{x}}(t) = \tilde{\underline{x}}(t)$, vagyis

$$\hat{\underline{\xi}}(t) = \underline{0} \quad \text{és} \quad \underline{\psi}(t) = \underline{\xi}(t) \quad (4-31.)$$

Ezzel $R=0$ és

$$Q = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\underline{\xi}}^{-1} \underline{\xi}(t)\} = m + k \quad (4-32.)$$

(lásd a Függelék (F6-3.) összefüggését). Szűrés nélkül az egyenlőség-korlát általában nem teljesül.

4.8. A jósági index alsó korlátja

Mind elméleti, mind gyakorlati (tervezési) szempontból lényeges ismerni a jósági indexnek azt az alsó korlátját, amely az adott szűrő-struktúra, az egyenlőség-feltétel kielégítése és optimális szűrő-méretezés mellett fennáll. A következőkben ezt fogjuk meghatározni.

Irjuk fel az egyenlet-hibát a (3-21.) formula alapján és vegyük figyelembe a (3-25.) összefüggést is:

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{\xi}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \hat{\underline{\xi}}(t) \quad (4-33.)$$

Bontsuk két részre az egyenlet-hibát az alábbi módon:

$$\underline{u}(t) = \underline{K}_O \underline{\xi}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} [\underline{\xi}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t)] = \underline{K}_O \underline{\xi}(t) + \Delta \underline{u}(t) \quad (4-34.)$$

Láthatóan $\Delta \underline{u}(t)$ független $\underline{\xi}(t)$ pillanatnyi értékétől. A függetlenség következtében a (4-25.) szerint felírt R jósági index is két részre bontható:

$$R = R_S + \Delta R \quad (4-35.)$$

ahol R_S -t a (4-28.) összefüggésben definiáltuk és

$$\Delta R = E\{\Delta \underline{u}^T(t) \underline{A}^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A} \Delta \underline{u}(t)\} \quad (4-36.)$$

Ha $\Delta \underline{u}(t) = \underline{0}$, akkor $\Delta R = 0$ és $R = R_S$ (feltételes) optima az \underline{A}_S szuboptimális megoldás helyén van. Számítsuk ki a jósági index $R_S(\underline{A}_S)$ értékét. Mivel

$$\underline{A}_S^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A}_S = (\underline{K}_O \underline{P}_{\xi} \underline{K}_O^T)^{-1} \quad (4-37.)$$

és

$$\underline{K}_O^T (\underline{K}_O \underline{P}_{\xi} \underline{K}_O^T)^{-1} = \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A}_S \quad (4-38.)$$

a keresett jósági index az alábbi:

$$R_S(\underline{A}_S) = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A}_S \underline{K}_O \underline{\xi}(t)\} \quad (4-39.)$$

A 6.Függelék (F6-2.) és (F6-4.) összefüggései alapján ez tovább írható:

$$R_S(\underline{A}_S) = \text{tr}(\underline{A}_S \underline{K}_O) = \text{tr}(\underline{K}_O \underline{A}_S) = \text{tr}(\underline{I}) = m \quad (4-40.)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\underline{K}_O \underline{A}_S = \underline{I}$ és \underline{I} mxm méretű egység-mátrix.

Általában $\Delta \underline{u}(t) \neq \underline{0}$. Ekkor R (feltételes) optima az \underline{A}_C (egyenlőség-korlátot kielégítő) optimális megoldás helyén van.

Nyilvánvalóan

$$R(\underline{A}_S) \geq R(\underline{A}_C) \quad (4-41.)$$

Másrészt mivel R_S (feltételes) optima az \underline{A}_S helyén van, ezért

$$R_S(\underline{A}_C) \geq R_S(\underline{A}_S) \quad (4-42.)$$

Mivel pedig ΔR nem negatív, fennáll, hogy

$$R(\underline{A}_C) = R_S(\underline{A}_C) + \Delta R(\underline{A}_C) \geq R_S(\underline{A}_S) \quad (4-43.)$$

Összefoglalva:

$$R(\underline{A}_S) \geq R(\underline{A}_C) \geq R_S(\underline{A}_S) = m \quad (4-44.)$$

Ezzel megkaptuk az R LN jósági index alsó korlátját az egyenlőség-feltétel kielégítése mellett. A (4-13.) összefüggést is figyelembe véve a fenti eredmény a Q MV jósági index alsó korlátját is megadja:

$$Q(\underline{A}_S) \geq Q(\underline{A}_C) \geq k \quad (4-45.)$$

4.9. Határérték-tulajdonságok

További betekintést nyerhetünk a szűrő természetébe, ha megvizsgáljuk annak viselkedését extrémális körülmények között. Általában a megfigyelés tárgyát képező folyamat folytonos, s ennek folytonos-diszkrét leírása függ a Δt mintavételi időköztől. Így a határérték-vizsgálatok egy kézenfekvő és jól definiálható módja a mintavételi időköz függvényében történő elemzés.

Először megvizsgáljuk, hogyan viselkedik a folyamat folytonos-diszkrét átviteli függvénye a mintavételi időköz extrémális értékei mellett. Tegyük fel, hogy a folyamat stabil és nem integráló jellegű. Amint a mintavételi időköz minden határon túl csökken, a folyamat viselkedése attól függ, hogy folytonos átviteli függvénye tartalmaz-e időkésés nélküli tagokat. Ha ilyen tagok nincsenek, a mintavételi időköz csökkenésével eltűnik a bemenő-jelek hatása a pillanatnyi kimenő-jelekre, vagyis

$$\underline{G}_i \rightarrow \underline{0} \quad i=0\dots n \quad \text{ha } \Delta t \rightarrow 0 \quad (4-46.)$$

Ha a folytonos rendszer tartalmaz időkésés nélküli tagokat, a mintavételi időköz csökkenésével csak ezek hatása marad meg, így

$$\underline{G}_i \rightarrow h_i \underline{C} \quad i=0\dots n \quad \text{ha } \Delta t \rightarrow 0 \quad (4-47.)$$

ahol \underline{C} állandó mátrix. Láthatóan a (4-47.) összefüggés speciális esetként ($\underline{C} = \underline{0}$) tartalmazza a (4-46.) összefüggést is. Mindkét esetben egyébként az $1 + h_1 z^{-1} + \dots + h_n z^{-n}$ nevező

$(1 - z^{-1})^n$ -hez tart. Másrészt amint a mintavételi időköz minden határon túl nő, eltűnik minden korábbi be- és kimenő-jel érték hatása a pillanatnyi kimenő-jelekre. Vagyis

$$\underline{K}_i \rightarrow \underline{0} \quad i=1\dots n \quad \text{ha} \quad \Delta t \rightarrow \infty \quad (4-48.)$$

A fentiekben csupán logikai megfontolásokkal alátámasztott állításokat formálisan is bizonyítjuk a lo.Függelékben.

Vizsgáljuk most meg az optimális és szuboptimális szűrő tulajdonságait a szóbanforgó extrémális körülmények között.

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor - a (4-47.) összefüggés szerint -

$\underline{K}_i \rightarrow [\underline{C} \quad -\underline{I}]h_i$ i minden értékére. Alkalmazzuk először a (4-24.) szerint megoldott egyenlőség-korlátot erre az esetre:

$$\underline{A}_y = \underline{G}_0 \underline{A}_u - \underline{I} = \underline{C} \underline{A}_u - \underline{I} \quad (4-49.)$$

mivel $h_0 = 1$. Helyettesítsük ezt be az egyenlet-hiba (3-26.)

képletébe és vegyük ismét figyelembe \underline{K}_i fenti speciális alakját. Némi számítás után azt kapjuk, hogy

$$\underline{u}(t) = [\underline{I} + \underline{I} \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}]^{-1} \sum_{i=0}^n h_i z^{-i} \underline{K}_0 \underline{\xi}(t) = \underline{K}_0 \underline{\xi}(t) \quad (4-50.)$$

mivel $[\underline{C} \quad -\underline{I}]\underline{A} = \underline{C} \underline{A}_u - \underline{A}_y = \underline{I}$ és $\underline{K}_i = [\underline{C} \quad -\underline{I}]h_i = \underline{K}_0 h_i$. Másrészt ha $\Delta t \rightarrow \infty$, akkor $\underline{K}_i \rightarrow \underline{0}$ i minden nullától különböző értékére. Így a (3-26.) vagy a (4-33.) összefüggésből

$$\underline{u}(t) = \underline{K}_0 \underline{\xi}(t) \quad (4-51.)$$

Láthatóan mindkét határesetben $\Delta \underline{u}(t) = \underline{0}$; így a szuboptimális megoldás egyben az optimális megoldás is és az LN jósági index határértéke $R=m$.

Végezetül vizsgáljuk meg a triviális szűrő határérték-tulajdonságait. Az eredmények most függeni fognak a \underline{P}_ξ mátrix strukturájától és \underline{C} értékétől; az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy \underline{P}_ξ blokk-diagonális (a bemeneti és kimeneti zajok egymással korrelálatlanok) és $\underline{C} = \underline{0}$. Mivel $\underline{A}_T = [\underline{0} \quad -\underline{I}]^T$, a jósági index (4-25.) formulája most így írható:

$$R = E\{\underline{u}^T(t) \underline{P}_u^{-1} \underline{u}(t)\} \quad (4-52.)$$

ahol $\underline{P}_u = \underline{P}_{uu}(0)$ a \underline{P}_ξ mátrix $m \times m$ méretű jobb alsó almátrixa

(a $\underline{v}(t)$ zajvektor korrelációs mátrixa). Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor $\underline{K}_0 \rightarrow [0 \quad -\underline{I}]$ és így határértékben

$$\underline{u}(t) = \underline{K}_0 \underline{\xi}(t) = -\underline{v}(t) \quad (4-53.)$$

Ezzel - figyelembe véve a 6.Függelék (F6-3.) összefüggését is -

$$R = E\{\underline{v}^T(t) \underline{P}_v^{-1} \underline{v}(t)\} = m \quad (4-54.)$$

Ha viszont $\Delta t \rightarrow \infty$, akkor határértékben

$$\underline{u}(t) = \underline{K}_0 \underline{\xi}(t) = \underline{G}_0 \underline{w}(t) - \underline{v}(t) \quad (4-55.)$$

(ahol természetesen \underline{G}_0 -t a $\Delta t \rightarrow \infty$ határértékével kell figyelembe venni) és ezzel

$$R = m + E\{\underline{w}^T(t) \underline{G}_0^T \underline{P}_v^{-1} \underline{G}_0 \underline{w}(t)\} \quad (4-56.)$$

Hangsúlyozni kell, hogy a (4-54.) és (4-56.) eredmények csak a tárgyalt - leggyakoribb, de mégis speciális - esetben érvényesek.

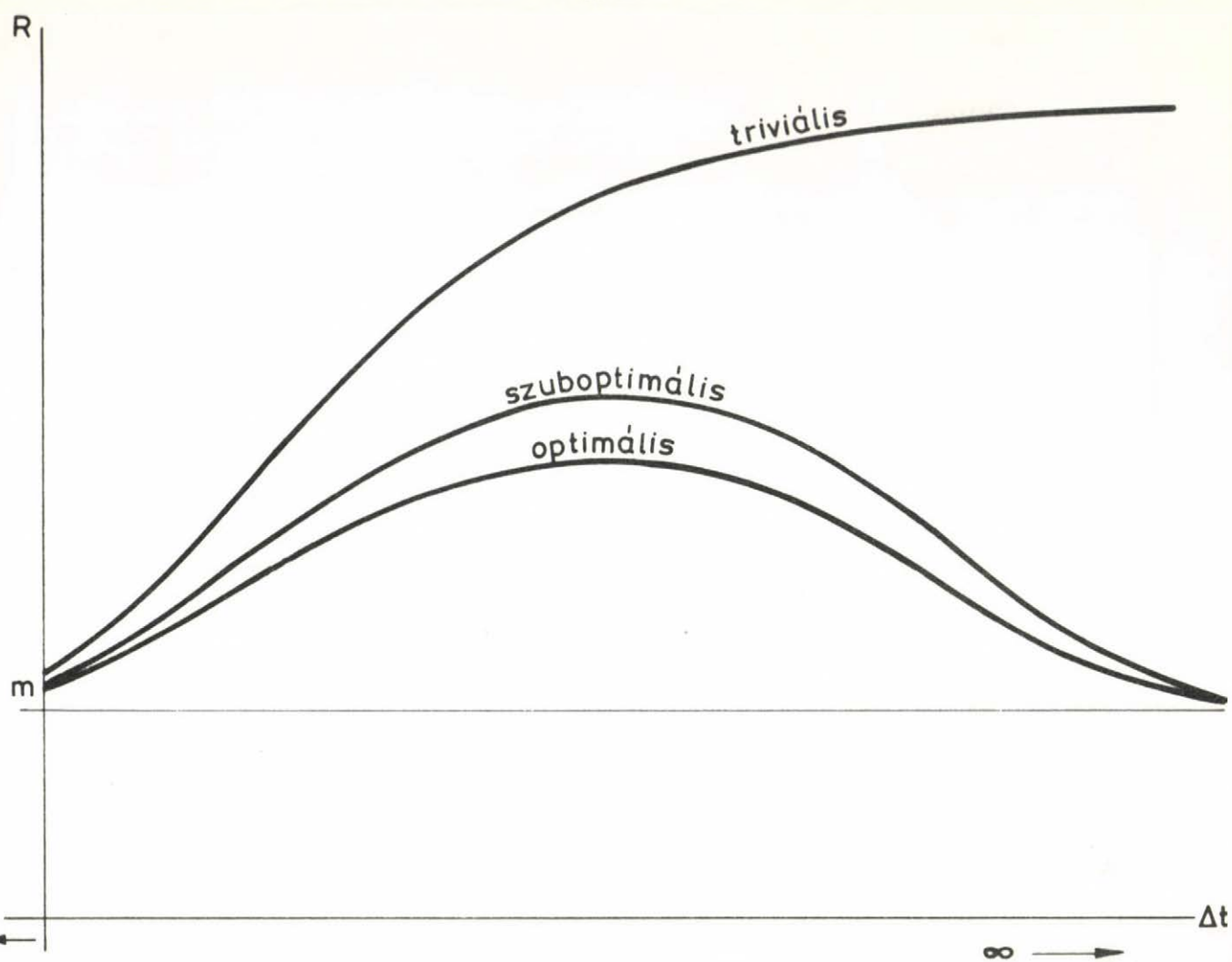
A 9.Fejezetben számos konkrét rendszerre nézve megvizsgáltuk a jósági index alakulását a mintavételi időköz függvényében. A számszerű eredmények természetesen összhangban vannak a jelen fejezetben mondottakkal. A 4.4.ábrán - egyelőre csak minőségileg - bemutatjuk az $R(\Delta t)$ függvények lefutását optimális, szuboptimális és triviális szűrő-mátrixok mellett.

4.10. Elemi rendszer

Az elmondottak szemléltetésére térjünk vissza a 3.6.alfejezetben bevezetett elemi rendszerhez. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a zajok függetlenek, vagyis

$$\underline{P}_\xi = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix} \quad (4-57.)$$

Az optimális és szuboptimális megoldás szemléletes összehasonlíthatósága érdekében induljunk ki a jósági index (4-25.) alakjából. Mivel most



4-4. ábra.

$$\underline{A}^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/p_{11} & 0 \\ 0 & 1/p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{a_1^2}{p_{11}} + \frac{a_2^2}{p_{22}} \quad (4-58.)$$

és a $\mu(t)$ egyenlet-hiba skalár, a jósági index

$$R = \left[\frac{a_1^2}{p_{11}} + \frac{a_2^2}{p_{22}} \right] E\{\mu^2(t)\} \quad (4-59.)$$

Az egyenlet-hiba négyzetes várható értékének meghatározásához kövessük a 4.3. alfejezetben bemutatott módszert. A 3. Fejezet (3-51.) képletéből kiolvasható, hogy esetünkben

$$\eta_1 = a_1 g_1 - a_2 h_1 \quad \underline{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} g_0 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} g_1 & -h_1 \end{bmatrix} \quad (4-60.)$$

A 4.3. alfejezetben definiált \underline{E} és \underline{F} mátrixok:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\eta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \frac{1}{1-\eta_1^2} \begin{bmatrix} 1 & -\eta_1 \\ -\eta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-61.)$$

az \underline{S} mátrix pedig ennek megfelelően

$$S = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^1 \sum_{\ell=0}^1 f_{oi} e^{(j-i)\ell} \underline{\Gamma}_j^T \underline{\Gamma}_\ell = \frac{1}{1-\eta_1^2} (\underline{\Gamma}_0^T \underline{\Gamma}_0 + \underline{\Gamma}_1^T \underline{\Gamma}_1 - 2\eta_1 \underline{\Gamma}_1^T \underline{\Gamma}_0) \quad (4-62.)$$

A keresett négyzetes várható értéket

$$E\{\mu^2(t)\} = s_{11} p_{11} + s_{22} p_{22} \quad (4-63.)$$

alakban kapjuk. Elvégezve a részlet-számításokat az eredmény:

$$E\{\mu^2(t)\} = \frac{[g_0^2 + g_1^2 - 2(a_1 g_1 - a_2 h_1) g_0 g_1] p_{11} + [1 + h_1^2 - 2(a_1 g_1 - a_2 h_1) h_1] p_{22}}{1 - (a_1 g_1 - a_2 h_1)^2} \quad (4-64.)$$

Ha az optimális szűrő-paramétereket kívánjuk meghatározni, a (4-64.) eredményt be kell helyettesítenünk a (4-59.) egyenletbe. Az így nyert jósági index deriválásával a szűrő paraméterekre nézve negyedfoku egyenletre jutunk, ami már ebben az egyszerű esetben is csak numerikusan oldható meg. A szuboptimális megoldáshoz viszont a (4-59.) egyenletben az $E\{\mu^2(t)\}$ tényezőt a szűrő-paraméterektől függetlennek tekintjük, így csak az első tényezőre kell minimalizálni. Figyelembe véve,

hogy a (3-50.) egyenlőség-korlátból

$$a_2 = a_1 g_o - 1 \quad (4-65.)$$

a jósági index így írható:

$$R = \left[\frac{a_1^2}{p_{11}} + \frac{(a_1 g_o - 1)^2}{p_{22}} \right] E\{\mu^2(t)\} \quad (4-66.)$$

Ennek deriválásából a szuboptimális szűrő-paraméterek egyszerűen megkaphatók:

$$a_{S1} = \frac{g_o p_{11}}{p_{22} + g_o^2 p_{11}} \quad a_{S2} = - \frac{p_{22}}{p_{22} + g_o^2 p_{11}} \quad (4-67.)$$

A szuboptimális szűrő természetesen közvetlenül a (4-26.) képlettel is számítható:

$$\underline{A}_S = \underline{P}_\xi \underline{K}_O^T (\underline{K}_O \underline{P}_\xi \underline{K}_O^T)^{-1} = \begin{bmatrix} g_o p_{11} \\ -p_{22} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{p_{22} + g_o^2 p_{11}} \quad (4-68.)$$

5. A SZÜRŐ STABILITÁSA

5.1. Bevezetés

Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy a tárgyalt szűrő egy visszacsatolt diszkrét numerikus algoritmus. A visszacsatolás következtében lehetséges, hogy az algoritmus instabil működést mutat: korlátos bemenő-jel mellett is nem korlátos kimenő-jelet szolgáltat. Instabil szűrő természetesen gyakorlatilag hasznavehetetlen, ezért nem nélkülözhető a szűrő-algoritmus stabilitásának vizsgálata.

A szűrő stabilitása annak karakterisztikus polinomja alapján ítéltető meg. A karakterisztikus polinom - például a szűrő (3-26.) leírásából kiindulva, és figyelembe véve az (F1-11.) összefüggést - az alábbi módon írható fel:

$$H(z^{-1}) = 1 + \eta_1 z^{-1} + \dots + \eta_{nm-1} z^{-nm+1} + \eta_{nm} z^{-nm} = \left| \underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right| \quad (5-1.)$$

A szűrő akkor és csak akkor stabil, ha a $H(z^{-1}) = 0$ egyenletnek nincs olyan gyöke (z^{-1} -ben), amely egynél kisebb abszolút értékű. A karakterisztikus polinom átírható z polinomjaként is:

$$H'(z) = \eta_{nm} + \eta_{nm-1} z + \dots + \eta_1 z^{nm-1} + z^{nm} \quad (5-2.)$$

Igy a stabilitás feltétele az, hogy a $H'(z) = 0$ egyenlet minden gyöke (z -ben) egynél kisebb abszolút értékű legyen. Az effektív stabilitás-vizsgálat történhet a gyökök közvetlen meghatározásával, vagy valamilyen közvetett módszer, például a Schur-Cohn stabilitási kritérium segítségével [A3, A9].

A következőkben először rámutatunk a jósági index értéke és a szűrő stabilitása közti összefüggésre. Ezután megvizsgáljuk a stabilitási tartományt a szűrő-paraméterek terében. Végül elemezzük a triviális, a szuboptimális és az optimális szűrő stabilitását.

5.2. Összefüggés a jósági index és a stabilitás között

A (4-3.) és (4-4.) összefüggésből látható, hogy a választott jósági indexek a szűrő $\underline{\psi}(t)$ illetve $\underline{\xi}(t)$ kimenő-jelei korrelációs függvényeinek súlyozott összegei. Ha a szűrő stabil, a kimenő-jelek korrelációs függvényei - és így a jósági indexek is - korlátos bemenő-jel mellett korlátosak. Ha viszont a szűrő instabil, a kimenő-jelek korrelációs függvényei minden határon túl növekednek. A 7. és 8. Függelékben bevezetett és a 4.3. alfejezetben összefoglalt eljárás a jósági indexek számítására azon a feltevésen alapul, hogy a kimenő-jel korrelációs függvénye stacionárius. Instabil szűrő esetén ez nem teljesül, így a jósági indexre kapott számértékek értelmetlenek. Stabil szűrő esetén viszont - egész a stabilitási tartomány határáig - a stacionaritás fennáll. Így a jósági index számértéke a stabilitási tartományon belül helytálló, beleértve hogy a stabilitás határához közelítve végtelenhez tart. Ezért egy adott szűrő stabilitását a jósági indexre nyert számérték alapján közvetlenül megítélni nem lehet ugyan, de az eljárás felhasználható a stabilitási tartomány határainak megállapítására.

A jósági index értékét a (4-20.) formulával számítjuk. A formulában szereplő \underline{E} illetve \underline{F} mátrixok inverzióval állnak elő (lásd a (4-18.) és (4-19.) képleteket); a jósági indexnek ott van szakadása, ahol az invertálandó mátrixok valamelyike szinguláris. Az $\underline{E}^{-1} = \underline{I} + \underline{H}_A$ mátrix determinánsa egységnyi, így ez a mátrix szakadást nem okoz. Szakadást okoz viszont az \underline{F} mátrix mindazokon a helyeken, ahol az

$$\underline{F}^{-1} = \underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F \quad (5-3.)$$

mátrix determinánsa zérus.

A továbbiakban jelölje \underline{D} a jósági indexnek ezt a determinánsát. Mivel a \underline{H}_A és \underline{H}_F mátrixok a $H(z^{-1})$ karakterisztikus polinom $\eta_1 \dots \eta_{nm}$ együtthatóit tartalmazzák, a

$$|\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F| = D(\eta_1 \dots \eta_{nm}) = 0 \quad (5-4.)$$

egyenlet megoldásai az $\eta_1 \dots \eta_{nm}$ együttthatók terében adják meg a jósági index szakadási helyeit, vagyis a szűrő stabilitási tartományának határait.

A stabilitási tartomány határai jobban érzékelhetők, ha a D determinánst az η_i együttthatókban minimális fokszámu tényezőkre bontjuk:

$$D(\eta_1 \dots \eta_{nm}) = \prod_j d_j(\eta_1 \dots \eta_{nm}) \quad (5-5.)$$

Nyilvánvalóan a D determináns ott nulla, ahol tényezőinek bármelyike nulla. Így az (5-4.) egyenlet annyi elemi

$$d_j(\eta_1 \dots \eta_{nm}) = 0 \quad (5-6.)$$

egyenletre bomlik, amennyi a tényezők száma. Minden a tényezőkre vonatkozó egyenlet pedig egy $nm-1$ dimenziós alakzatot (görbe, felület, hiperfelület) ír le az η_i paraméterek nm dimenziós terében.

Másrészt könnyen belátható, hogy a stabilitás tartománya csak zárt lehet az η_i paraméterek terében. Irjuk fel ugyanis az (5-2.) karakterisztikus polinomot gyöktényezőss formában:

$$H'(z) = \sum_{i=0}^{nm} \eta_i z^{nm-i} = \prod_{j=1}^{nm} (z - z_j) \quad (5-7.)$$

ahol z_j ($j=1 \dots nm$) a karakterisztikus polinom gyökei. Az η_i paraméterek láthatóan a z_j gyöktényezők szorzat-összegeiként állnak elő. Minthogy pedig stabil szűrő esetén a z_j gyökök korlátosak (az egységsugaru körön belül helyezkednek el), az η_i paraméterek stabil tartománya is korlátos.

Ha a D determináns valamennyi tényezője lineáris az η_i együttthatókban, akkor ez utóbbi állítás az (5-5.) és (5-6.) egyenletekből formálisan is következik. Ekkor ugyanis az (5-5.) és (5-6.) egyenletek $nm+1$ számú lineáris alakzatot írnak le, ezek pedig egyetlen zárt tartományt fognak körül az nm dimenziós térben. Esetleges nemlineáris tényezők viszont azt jelentik, hogy a stabilitási tartományt nemlineáris alakzatok (is) határolják; ekkor a stabilitási tartomány zártsága az (5-5.) és (5-6.) egyenletekből nem közvetlenül nyilvánvaló.

A következőkben a stabilitási tartomány határait első és másodrendű szűrőkre fogjuk megvizsgálni; látni fogjuk, hogy itt a tartományt lineáris alakzatok határolják. A jósági indexek determinánsából levonható következtetéseket össze fogjuk hasonlítani a Schur-Cohn stabilitási kritériummal; a párhuzam azért is kézenfekvő, mivel a Schur-Cohn kritérium is determinánsok formájában van megfogalmazva. A Schur-Cohn determinánsokat Δ_i -vel ($i=1\dots nm$) fogjuk jelölni.

5.2.1. Elsőrendű szűrő

Tekintsünk egy elsőrendű szűrőt, amelynek a karakterisztikus polinomja

$$H(z^{-1}) = 1 + \eta_1 z^{-1} \quad (5-8.)$$

A jósági index determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} \underline{I} & \underline{H}_A & \underline{H}_F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 \\ \eta_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \eta_1^2 = (1 + \eta_1)(1 - \eta_1) \quad (5-9.)$$

A Schur-Cohn determináns felírásához a karakterisztikus polinom (5-2.) alakjából kell kiindulni. Ebből

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 & 1 \\ 1 & \eta_1 \end{vmatrix} = \eta_1^2 - 1 = -(1 + \eta_1)(1 - \eta_1) \quad (5-10.)$$

Láthatóan $\Delta_1 = -D$. A stabilitás határai mindkét megközelítésből $\eta_1 = 1$ és $\eta_1 = -1$. A zárt tehát stabil tartomány e két határ között van. Ezt alátámasztja a Schur-Cohn kritérium is, amely szerint a rendszer ott stabil, ahol $\Delta_1 < 0$; ez szintén a két határ között teljesül.

5.2.2. Másodrendű szűrő

Legyen most a szűrő karakterisztikus polinomja

$$H(z^{-1}) = 1 + \eta_1 z^{-1} + \eta_2 z^{-2} \quad (5-11.)$$

Ezzel a jósági index determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1 & 1+\eta_2 & 0 \\ \eta_2 & \eta_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \eta_2 - \eta_2^2 - \eta_2^3 - \eta_1^2 + \eta_1^2 \eta_2 =$$

$$= (1 - \eta_2)(\eta_2 + 1 + \eta_1)(\eta_2 + 1 - \eta_1) \quad (5-12.)$$

A $D=0$ feltételnek megfelelően a stabilitási tartományt három egyenes határolja, amelyek egyenletei

$$\begin{aligned} 1 - \eta_2 &= 0 \\ \eta_2 + 1 + \eta_1 &= 0 \\ \eta_2 + 1 - \eta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5-13.)$$

A három egyenest az 5-1. ábra szemlélteti. Korábbi megfontolásaink szerint az η_1 - η_2 síknak a három egyenes által közbezárt része lesz a stabil tartomány.

A Schur-Cohn determinánsok most az alábbiak:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \eta_2 & 1 \\ 1 & \eta_2 \end{vmatrix} = \eta_2^2 - 1 = -(1 + \eta_2)(1 - \eta_2) \quad (5-14.)$$

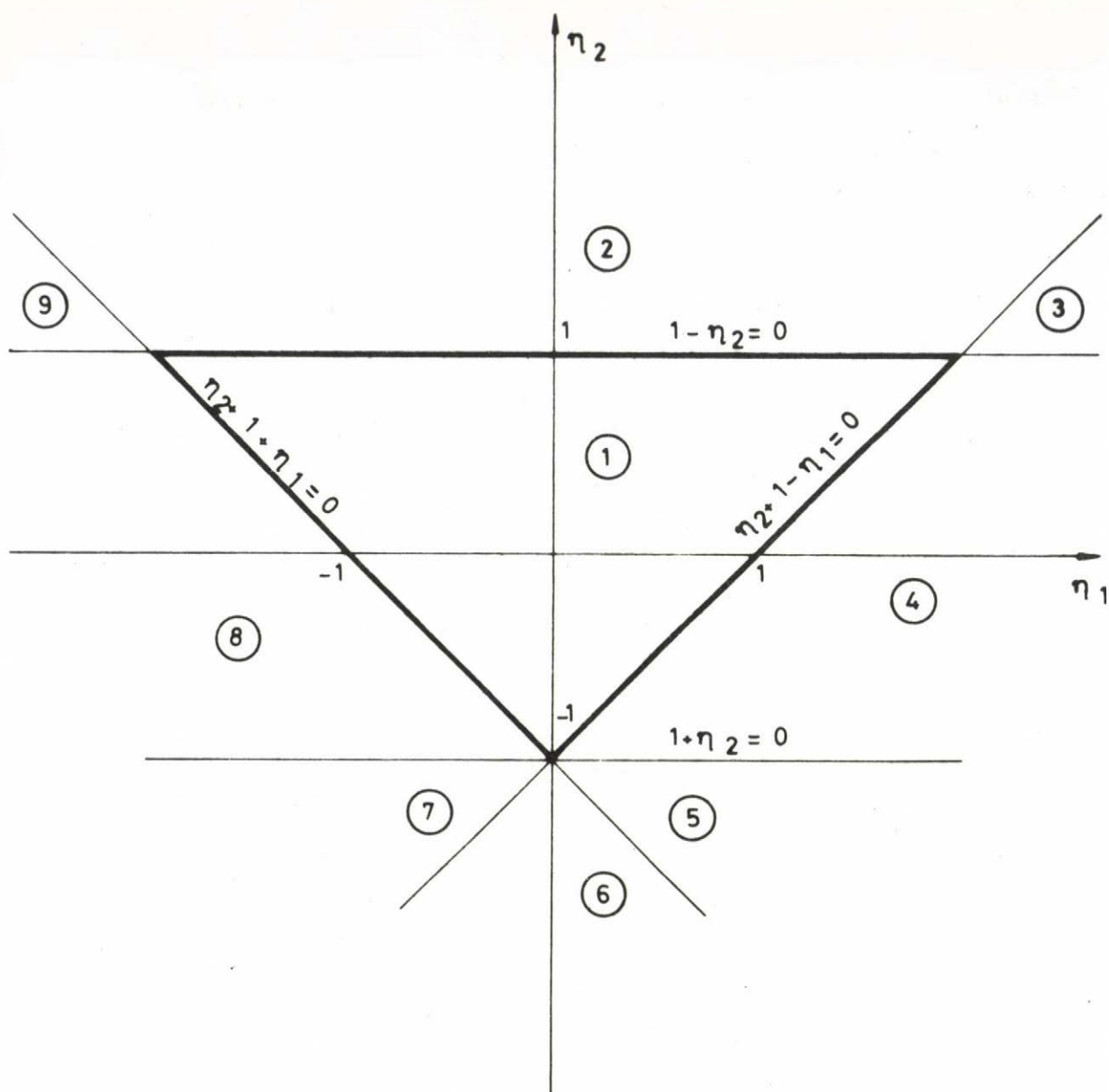
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \eta_2 & 0 & 1 & \eta_1 \\ \eta_1 & \eta_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \eta_2 & \eta_1 \\ \eta_1 & 1 & 0 & \eta_2 \end{vmatrix} = 1 - 2\eta_2^2 + \eta_2^4 - \eta_1^2 + 2\eta_1^2 \eta_2 - \eta_1^2 \eta_2^2 =$$

$$= (1 - \eta_2)^2 (\eta_2 + 1 + \eta_1)(\eta_2 + 1 - \eta_1) \quad (5-15.)$$

Ebből a stabilitás határai a $\Delta_1=0$ illetve $\Delta_2=0$ feltételek szerint

$$\begin{aligned} 1 + \eta_2 &= 0 \\ 1 - \eta_2 &= 0 \\ \eta_2 + 1 + \eta_1 &= 0 \\ \eta_2 + 1 - \eta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5-16.)$$

Láthatóan három egyenlet megegyezik az (5-13.) határokkal, de van egy negyedik egyenlet is. Könnyű megmutatni azonban, hogy ez az $1+\eta_2=0$ egyenes az $\eta_2+1+\eta_1=0$ és $\eta_2+1-\eta_1=0$ egyeneseket



5-1. ábra.

Tartomány	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ_1	-	+	+	-	+	+	+	-	+
Δ_2	+	+	-	-	-	+	-	-	-
D	+	-	+	-	-	+	-	-	+

5-1. Táblázat

éppen azok közös pontjában metszi, így a közbezárt tartományt nem befolyásolja (lásd 5-1. ábra).

A négy határ-egyenes az η_1 - η_2 síkot 9 tartományra osztja; ezeket az 5-1. ábrán beszámoltuk és az 5-1. Táblázatban feltüntettük a D , Δ_1 és Δ_2 determinánsok előjelét az egyes tartományokban. A táblázat alapján a Schur-Cohn kritérium is igazolja, hogy a három egyenes által közbezárt tartomány az η_1 - η_2 sík egyetlen stabilis része. Az is látható, hogy a jósági index determinánsa a stabil tartományban pozitív, azon kívül azonban lehet bármely előjelű.

5.3. Stabilitási tartomány a szűrő-paraméterek terében

A karakterisztikus polinom együtthatóinak terében meghatározott stabilitási tartományt áttranszformálhatjuk a szűrő-paraméterek terébe is. A transzformációhoz az (5-1.) egyenletből kell kiindulnunk, amely kapcsolatot teremt a karakterisztikus polinom együtthatói és a szűrő-paraméterek között. Mint-hogy e kapcsolatban a megfigyelt folyamat paraméterei is részt vesznek, a stabilitási tartomány a szűrő-paraméterek terében a folyamat-paraméterektől is függeni fog.

A szűrő-paraméterek terében az egyenlőség-korlát is könnyen ábrázolható; természetesen ez is függeni fog a folyamat-paraméterektől.

A következőkben csak egy-bemenet egy-kimenetű rendszerekre szorítkozunk, így $\underline{A} = [a_1 \quad a_2]^T$ és a szűrő-paraméterek tere az a_1 - a_2 sík. Első- és másodrendű rendszereket fogunk vizsgálni. Ekkor mind az egyenlőség-korlátot, mind pedig a stabilitási tartomány határait egyenesek írják le.

5.3.1. Elsőrendű rendszer

Elsőrendű egy-bemenet egy-kimenetű rendszerre

$$\underline{K}_0 = [g_0 \quad -1]$$

$$\underline{K}_1 = [g_1 \quad -h_1]$$

(5-17.)

Az (5-1.) összefüggésből

$$H(z^{-1}) = 1 + \underline{K}_1 \underline{A} z^{-1} \quad (5-18.)$$

vagyis

$$\eta_1 = g_1 a_1 - h_1 a_2 \quad (5-19.)$$

Az 5.2.1. alfejezet szerint a stabilitás határai $\eta_1 = \pm 1$. Ezt az (5-19.) eredménybe helyettesítve a határ-egyenesek az a_1 - a_2 síkon:

$$\begin{aligned} g_1 a_1 - h_1 a_2 - 1 &= 0 \\ g_1 a_1 - h_1 a_2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5-20.)$$

A két határ-egyenest az 5.2. ábrán tüntettük fel.

Az egyenlőség-korlát a (3-50.) összefüggés szerint

$$g_0 a_1 - a_2 - 1 = 0 \quad (5-21.)$$

Ezt szintén berajzoltuk az 5.2. ábrába.

Az egyenlőség-korlátot kielégítő stabil megoldások az (5-21.) egyenesnek az (5-20.) egyenesek által határolt szakaszán helyezkednek el. A határ-pont koordinátái a felső határon

$$a_1 = \frac{1 - h_1}{g_1 - h_1 g_0} \quad a_2 = \frac{g_0 - g_1}{g_1 - h_1 g_0} \quad (5-22.)$$

az alsó határon pedig

$$a_1 = -\frac{1 + h_1}{g_1 - h_1 g_0} \quad a_2 = -\frac{g_0 + g_1}{g_1 - h_1 g_0} \quad (5-23.)$$

5.3.2. Másodrendű rendszer

Másodrendű egy-bemenet egy-kimenetű rendszerre

$$\underline{K}_0 = [g_0 \quad -1] \quad \underline{K}_1 = [g_1 \quad -h_1] \quad \underline{K}_2 = [g_2 \quad -h_2] \quad (5-24.)$$

Az (5-1.) összefüggésből most

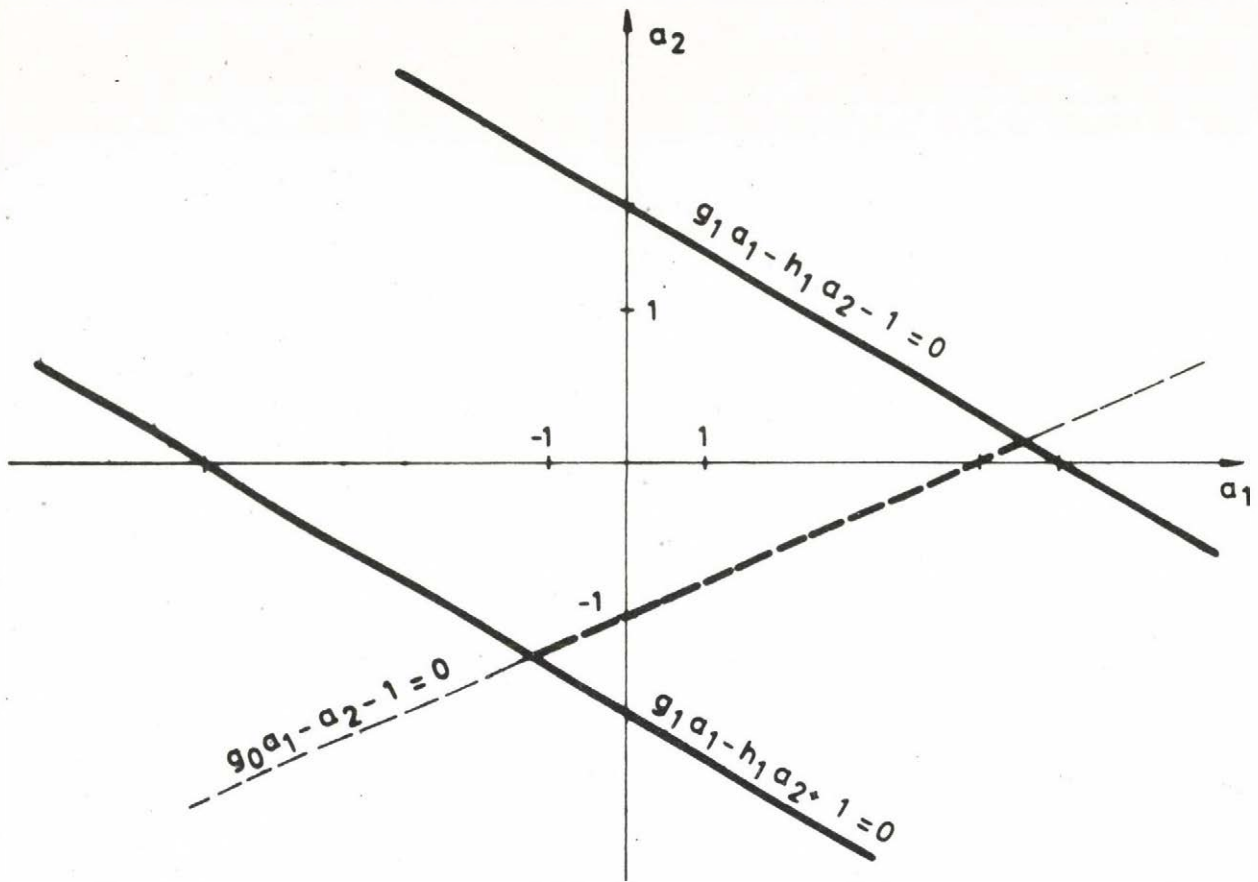
$$H(z^{-1}) = 1 + \underline{K}_1 \underline{A} z^{-1} + \underline{K}_2 \underline{A} z^{-2} \quad (5-25.)$$

vagyis

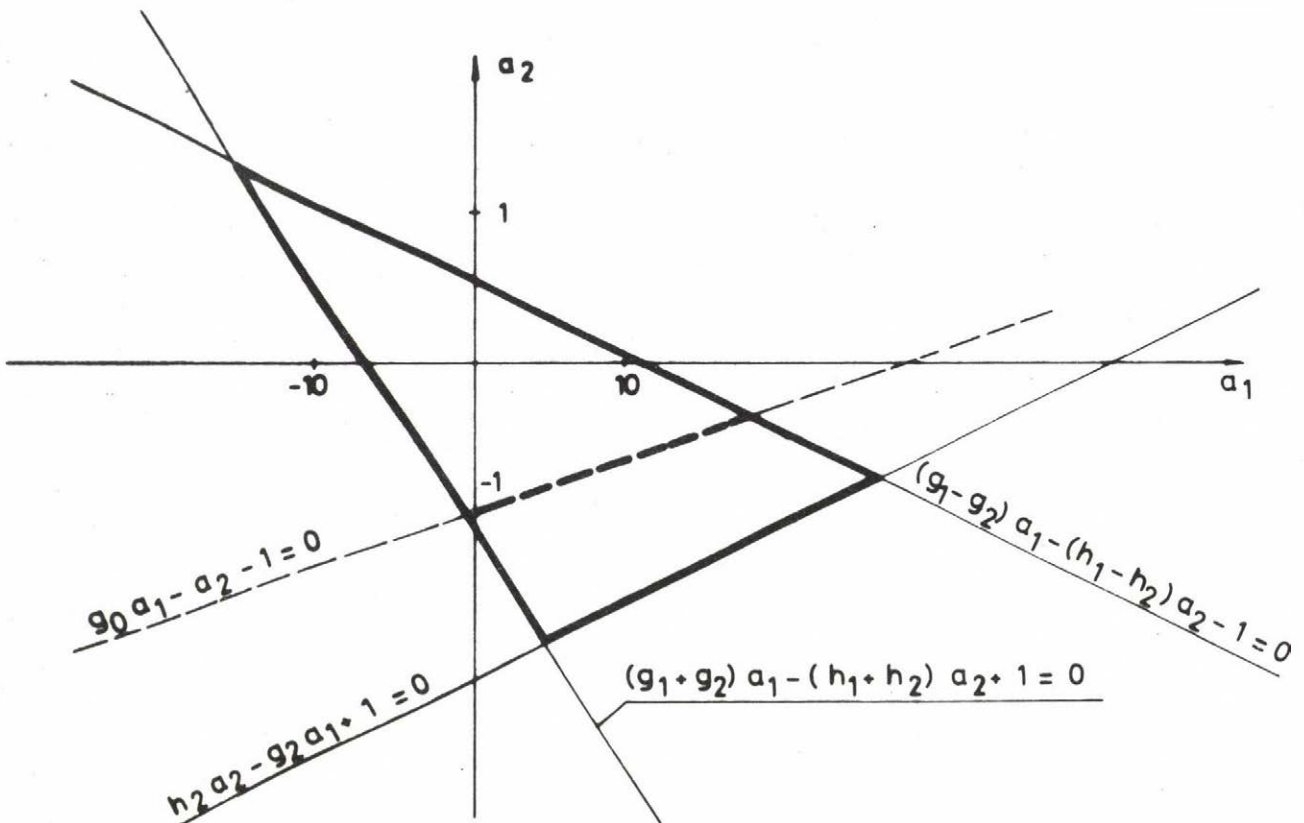
$$\eta_1 = g_1 a_1 - h_1 a_2 \quad (5-26.)$$

$$\eta_2 = g_2 a_1 - h_2 a_2$$

A stabilitás határait az η_1 - η_2 síkon az (5-13.) egyenletek ir-



5 - 2. ábra.



5 - 3. ábra.

ják le. Egybevetve ezeket az (5-26.) összefüggésekkel a határokat az a_1 - a_2 síkon az alábbiakban kapjuk:

$$h_2 a_2 - g_2 a_1 + 1 = 0$$

$$(g_1 + g_2) a_1 - (h_1 + h_2) a_2 + 1 = 0 \quad (5-27.)$$

$$(g_1 - g_2) a_1 - (h_1 - h_2) a_2 - 1 = 0$$

A három egyenest az 5.3.ábrán tüntettük fel. Ugyanitt ábrázoltuk az egyenlőség-korlátot leíró (5-21.) egyenest is. Az egyenlőség-korlátot kielégítő stabil megoldások most is az (5-21.) egyenesnek a stabilitási tartományba eső szakaszán helyezkednek el.

*

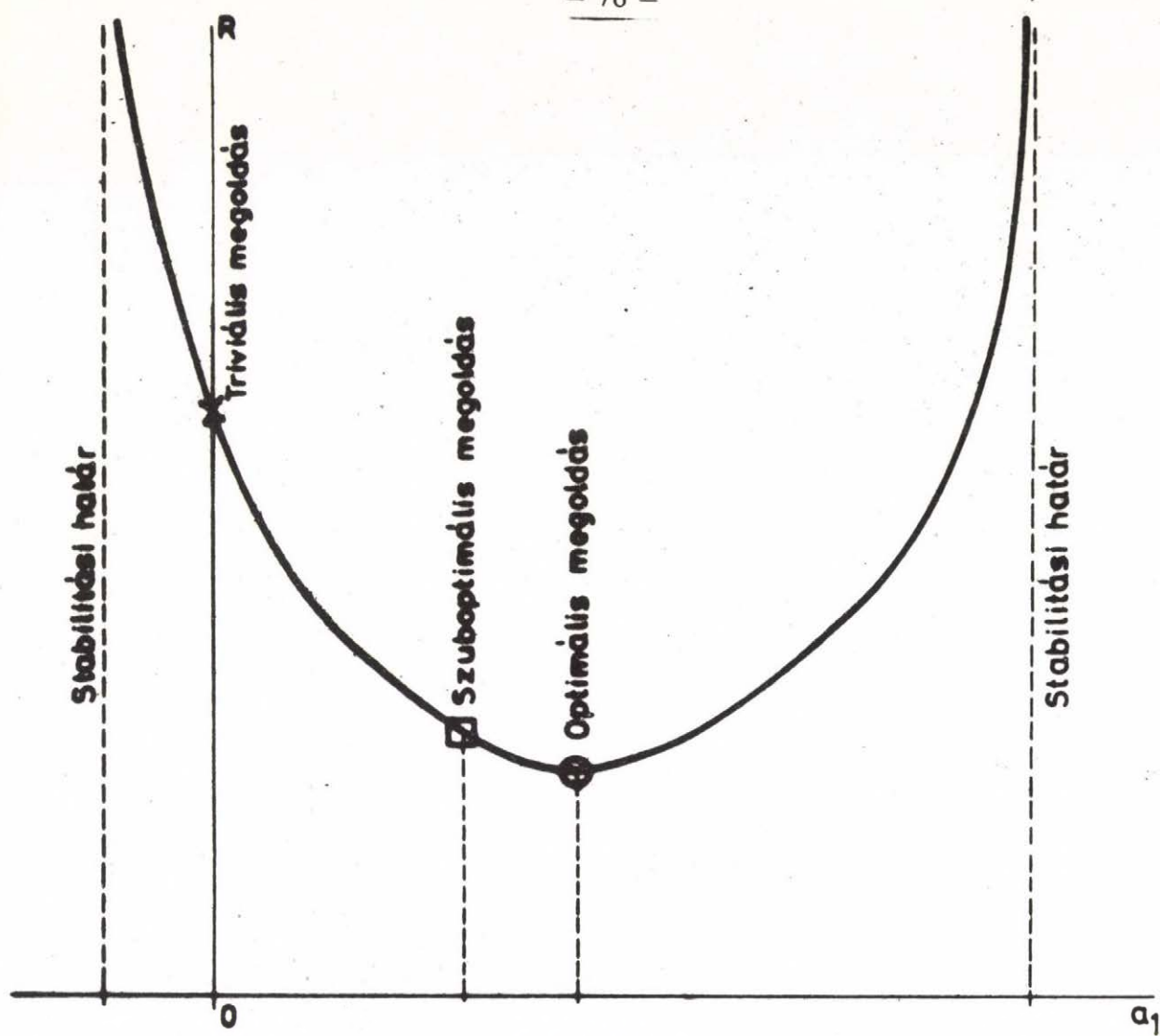
További betekintést nyerünk a szűrő működésébe, ha ábrázoljuk a jósági index alakulását az egyenlőség-korlát egyenesé mentén valamelyik - például az a_1 - szűrő-paraméter függvényében (5-4.ábra). A stabilitás határaihoz közeledve a jósági index végtelenhez tart. A görbe további nevezetes pontjai az optimális megoldás (a görbe minimum-helye) és a triviális megoldás (az $a_1=0$ pont). A szuboptimális megoldás általában az optimum közelében van, bár az is előfordulhat - amint azt a következő alfejezetben meg fogjuk mutatni -, hogy kívül esik a stabil tartományon.

5.4. A triviális, szuboptimális és optimális szűrő stabilitása

A továbbiakban a triviális, szuboptimális és optimális szűrő stabilitását vizsgáljuk meg. Megmutatjuk, hogy a triviális szűrő mindig stabil, ha a megfigyelt folyamat stabil. A szuboptimális szűrő stabilitása nem garantált, a triviális szűrő fenti tulajdonsága viszont biztosítja, hogy - megfelelő kereső eljárással - mindig található stabil optimális megoldás.

5.4.1. A triviális szűrő stabilitása

A triviális szűrő-mátrix



5-4. ábra.

$$\underline{\underline{A}}_T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{O}} \\ -\underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad (5-28.)$$

Ezzel - és figyelembe véve, hogy $\underline{\underline{K}}_i = [\underline{\underline{G}}_i \quad -h_i \underline{\underline{I}}]$ - a szűrő (5-1.) karakterisztikus polinomja az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} H(z^{-1}) &= |\underline{\underline{I}} + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{K}}_i \underline{\underline{A}} z^{-i}| = |\underline{\underline{I}} + \sum_{i=1}^n h_i \underline{\underline{I}} z^{-i}| = \\ &= |\underline{\underline{I}}(1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i})| \end{aligned} \quad (5-29.)$$

Az $\underline{\underline{I}}$ egységmátrix most $m \times m$ méretű, ezért a szűrő $H(z^{-1})$ karakterisztikus polinomja tovább így írható:

$$H(z^{-1}) = (1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i})^m = [h(z^{-1})]^m \quad (5-30.)$$

Itt $h(z^{-1})$ a megfigyelt folyamat karakterisztikus polinomja. Így a triviális szűrő karakterisztikus polinomja a folyamat pólusait m -szeresen tartalmazza, más gyöke viszont nincs. Tehát ha a megfigyelt folyamat stabil, a triviális szűrő is biztosan az.

5.4.2. A szuboptimális szűrő stabilitása

A szuboptimális szűrő stabilitása általánosan nem biztosított. Az esetleges instabilitás összefügg a szuboptimális szűrő tervezésének alapjául szolgáló közelítéssel. A pillanatnyi (statikus) optimalizálással kedvezőtlen egyenlet-hibát teremtünk a következő szűrési lépések számára és ez a folyamat egyes esetekben minden határon túl növekedhet.

Az alábbiakban egy egyszerű példán mutatjuk be, hogy a szuboptimális szűrő lehet instabil. Tekintsünk egy egy-bemenet egy-kimenetű elsőrendű rendszert. Tegyük fel, hogy $g_0 > 0$, $g_1 \geq 0$ és $h_1 < 0$, valamint hogy a zajok függetlenek és korrelációjuk egysegnyi. Ekkor a szuboptimális szűrő-mátrix a_1 paramétere a (4-67.) összefüggés szerint

$$a_{s1} = \frac{g_0}{1 + g_0^2} \quad (5-31.)$$

Az 5.3.1. alfejezetben megvizsgáltuk a stabilitási határokat az elsőrendű szűrőre nézve. Mivel $a_{g1} > 0$, a stabilitás szempontjából a "felső" határ kritikus (lásd az 5.2. ábrát). A szuboptimális szűrő stabilitásának feltétele tehát - az (5-22.) összefüggést is figyelembe véve - a következő:

$$\frac{g_0}{1 + g_0^2} < \frac{1 - h_1}{g_1 - h_1 g_0} \quad (5-32.)$$

Megoldva g_1 -re

$$g_1 < g_0 + \frac{1 - h_1}{g_0} \quad (5-33.)$$

Nyilvánvalóan létezhet olyan rendszer, amelyre az (5-33.) feltétel nem teljesül, tehát a szuboptimális szűrő instabil. Megjegyzendő, hogy ha a szóbanforgó rendszer egy egytárolós folytonos tag diszkrét leírása, akkor téglalap-közelítés esetén $g_1 = 0$, trapéz-közelítés esetén pedig $g_1 < g_0$, az (5-33.) feltétel tehát biztosan teljesül.

Ha a szuboptimális szűrő-mátrix instabilnak bizonyul és nem célunk a pontos optimum meghatározása, meg lehet kísérelni a szuboptimális és triviális mátrix egy keverékének az előállítását. Mivel az egyenlőség-feltétel az \underline{A} mátrix egyes oszlopaira nézve egymástól független megkötéseket jelent, a szuboptimális mátrix oszlopai egyenként helyettesíthetők a triviális mátrix megfelelő oszlopaival. Ezt az eljárást addig célszerű folytatni, amíg stabilis szűrő-mátrixra nem jutunk.

5.4.3. Az optimális szűrő stabilitása

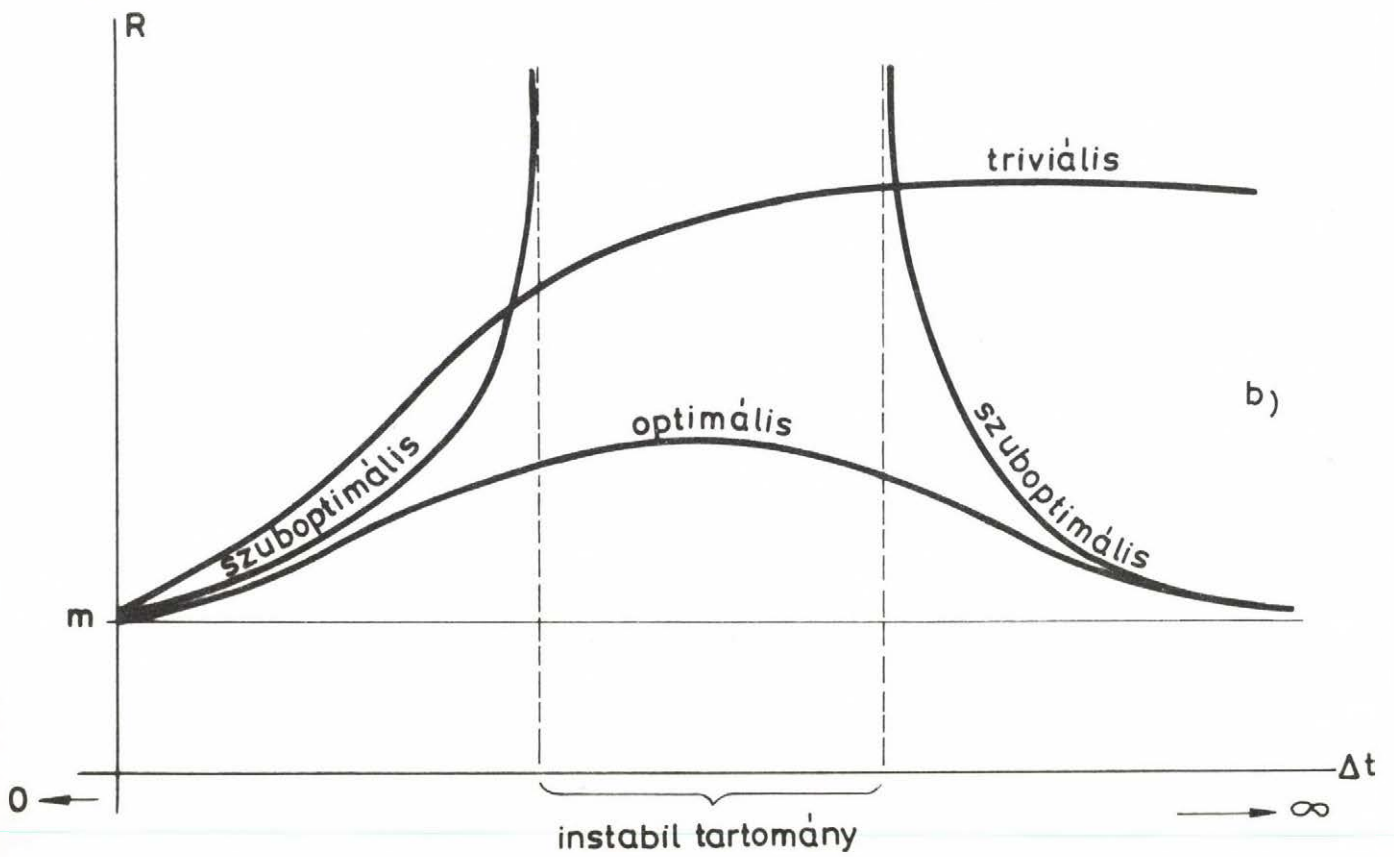
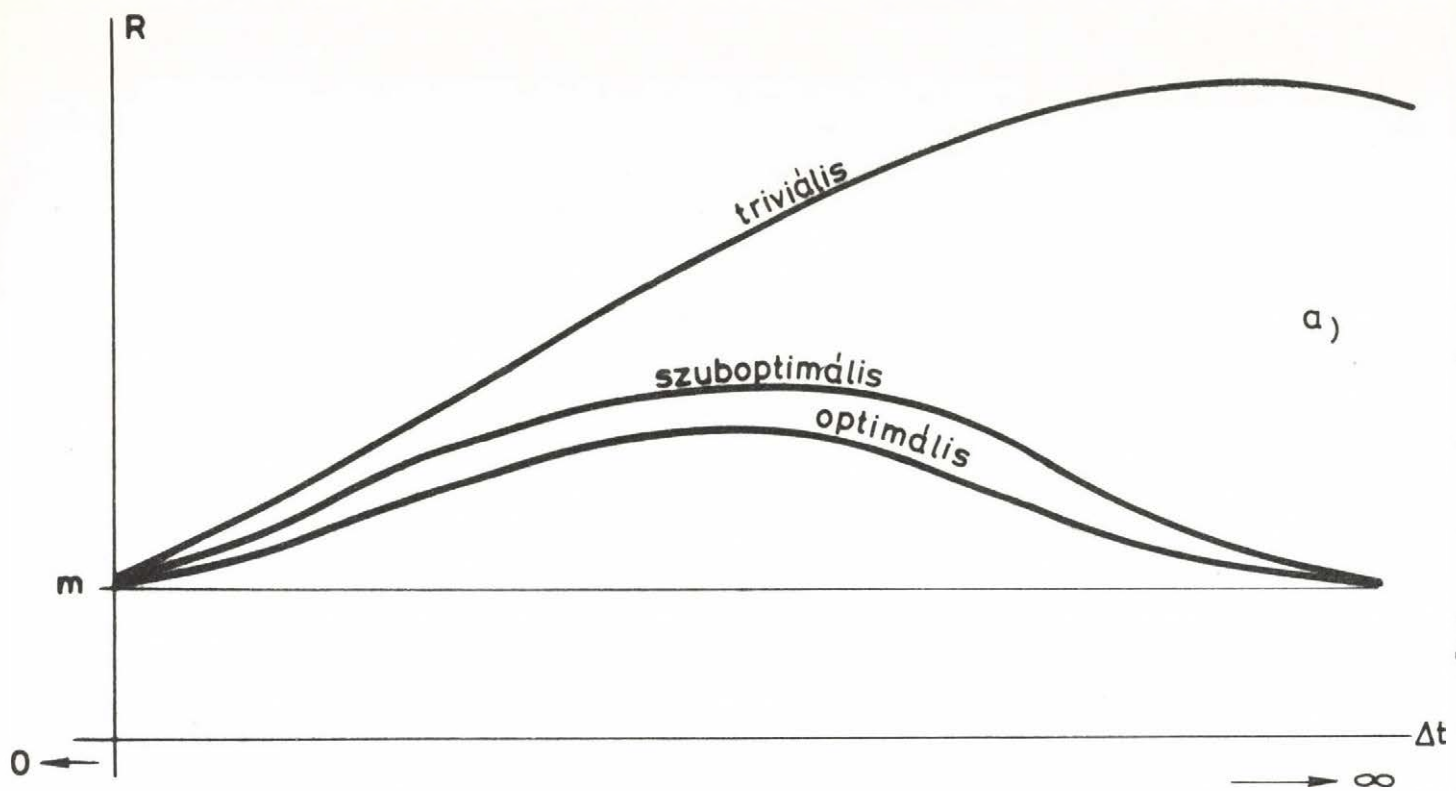
A triviális szűrő garantált stabilitása és a jósági index regularitása a stabilitási tartományon belül együttesen biztosítják, hogy mindig létezik stabil optimális szűrő. A keresés során azonban a stabilitást figyelemmel kell kísérni. Egy-egy keresési lépés ugyanis a stabil tartományon kívülre vihet, és ez a körülmény a jósági index értéke alapján nem észlelhető. Ezért minden keresési lépésben meg kell vizsgálni az új pont

stabilitását. Ez történhet a karakterisztikus egyenlet gyökeinek direkt meghatározásával, a Schur-Cohn eljárással, vagy oly módon, hogy előzetesen megállapítjuk - az adott rendszerre vonatkozóan - a stabilitási tartomány határait a szűrő-paraméterek terében, és az új pontot ezekhez viszonyítjuk.

A keresést a szuboptimális szűrőből célszerű indítani, mert ez könnyen számítható és általában közel van az optimumhoz. Minthogy azonban a szuboptimális szűrő lehet instabil, stabilitását külön ellenőrizni kell. Amennyiben a szuboptimális szűrő nem stabil, helyette a triviális szűrőt célszerű kiindulásul választani.

*

A 4.9. alfejezetben megvizsgáltuk az optimális, szuboptimális és triviális szűrő viselkedését - a jósági index alakulását - a Δt mintavételi időköz függvényében. A görbék minőségi lefutását a 4-4. ábrán mutattuk be; a szuboptimális szűrő itt végig stabil volt. Most az 5-5. ábrán a 4-4. ábrát - összehasonlítás céljából - megismételjük (a.eset) és megmutatjuk azt az esetet is, amikor a szuboptimális szűrő a Δt mintavételi időköz egy tartományában instabil (b.eset). A 9. Fejezetben egy konkrét rendszer vonatkozásában is ismertetni fogunk ilyen vizsgálatokat.



5-5. ábra.

6. A SZÜRŐ ÉRZÉKENYSÉGE

6.1. Bevezetés

Egy konkrét szűrő tervezésekor a környezet (a megfigyelt folyamat és a zajok) paramétereinek egy meghatározott értékrendszerét vesszük alapul. A paraméterek valóságos értékeire vonatkozó ismereteink azonban általában pontatlanok, és maguk a valóságos paraméterek is változhatnak az időben. Ezért a szűrő használhatósága szempontjából lényeges, hogy az hogyan reagál az ilyen pontatlanságokra illetve változásokra, vagyis milyen az azokkal szembeni érzékenysége.

Ebben a fejezetben a szűrő paraméter-érzékenységevel fogunk foglalkozni. Mint eddig is, a szűrő működését annak jósági indexével fogjuk jellemezni, és e skalár mennyiség érzékenységét fogjuk vizsgálni. Elsősorban a legegyszerűbben kezelhető lineáris érzékenységi függvényeket elemezzük, de utalni fogunk ezek korlátaira is és fel fogjuk vázolni, hogyan lehet a jósági index teljes megváltozását meghatározni.

A következőkben először definiáljuk a lineáris érzékenységi függvényeket, majd megvizsgáljuk azok viselkedését az optimum helyén. Ezután áttekintjük a szűrő működését befolyásoló paraméterek pontatlanságának hatását, végül egy egyszerű rendszer kapcsán konkrétan felírjuk az érzékenységi függvényeket illetve a jósági index megváltozásait.

Előrebocsátjuk, hogy az érzékenységi vizsgálatok többnyire igen aprólékos megfontolásokat és számításokat igényelnek. Ezek részleteibe általában nem fogunk belebocsátkozni, hanem inkább csak a főbb gondolatokat ismertetjük.

6.2. Lineáris érzékenységi függvények

Az alábbiakban - a leírás egyszerűsítése érdekében - feltételezzük, hogy a környezet paramétereit egy $\underline{\theta}$ vektor tartalmazza. Ez nem jelent elvi megszorítást az általánosabb paramétermátrixokkal szemben, mivel az eredményül kapott összefüggések

formálisan mátrixokra is értelmezhetők, illetve egy paraméter-mátrix elemei mindig vektorba rendezhetők.

A szűrő a folyamatból érkező jeleket dolgozza fel, amelyek természetesen a környezet valódi $\underline{\theta}$ paramétereitől függenek. Magát a szűrő-algoritmust viszont szükségszerűen a környezet paramétereiről való ismereteink, vagyis azok $\hat{\underline{\theta}}$ becslése alapján építjük fel. Így a szűrő R jósági indexe mind a valódi, mind a becsült paraméterektől függ:

$$R = R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}) \quad (6-1.)$$

A (6-1.) összefüggésből azonnal következik két lehetséges lineáris érzékenységi függvény definíciója:

$$\rho_{\underline{1}}^T = \left. \frac{d R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}})}{d \underline{\theta}} \right|_{\hat{\underline{\theta}} = \underline{\theta}} \quad (6-2.)$$

$$\rho_{\underline{2}}^T = \left. \frac{d R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}})}{d \hat{\underline{\theta}}} \right|_{\hat{\underline{\theta}} = \underline{\theta}} \quad (6-3.)$$

A $\rho_{\underline{1}}$ érzékenységi függvény azt mutatja, hogyan befolyásolja a jósági indexet, ha a valódi paraméterek megváltoznak (és becslésük nem), a $\rho_{\underline{2}}$ függvény pedig azt, ha a becslések változnak meg (és a valódi paraméterek nem). Mindkét változás viszonyítási alapja a $\hat{\underline{\theta}} = \underline{\theta}$ helyzet.

Definiálható egy harmadik érzékenységi függvény is:

$$\rho_{\underline{3}} = \rho_{\underline{1}} + \rho_{\underline{2}} \quad (6-4.)$$

Ez azt mutatja meg, hogyan változik a jósági index, ha a valódi és becsült paraméterek együtt változnak, vagyis ha egy környezeti változást tökéletesen követünk a szűrővel. Bizonyos értelemben a $\rho_{\underline{2}}$ és $\rho_{\underline{3}}$ függvények irnak le elemi hatásokat (a becslési hiba illetve a működési pont változását), a $\rho_{\underline{1}}$ függvény pedig egy összetett hatást (a működési pont megváltozik és ehhez az új ponthoz képest becslési hiba áll fenn).

A fentiekből következik, hogy a paraméter-becslési pontatlanság hatásának vizsgálatára a $\rho_{\underline{2}}$ függvényt kell felhasználni.

6.3. A becslések szerinti érzékenység az optimum helyén

A szűrési algoritmus saját paraméterei közül speciális jelentőségűek az \underline{A} szűrő-mátrix elemei. Az egyszerűség kedvéért tartalmazza most ezeket egy \underline{a} vektor. A szűrő-paraméterek a környezeti paraméterek becslésének függvényei

$$\underline{a} = \underline{a}(\hat{\underline{\theta}}) \quad (6-5.)$$

a jósági index tehát a környezeti paraméterek becslésétől részben közvetlenül, részben a szűrő-paramétereken keresztül függ:

$$R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}) = R[\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}(\hat{\underline{\theta}})] \quad (6-6.)$$

Ebből következik, hogy a becslések szerinti érzékenység így is írható:

$$\frac{d R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}})}{d \hat{\underline{\theta}}} = \frac{\partial R[\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}(\hat{\underline{\theta}})]}{d \hat{\underline{\theta}}} + \frac{\partial R[\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}(\hat{\underline{\theta}})]}{\partial \underline{a}} \frac{d \underline{a}(\hat{\underline{\theta}})}{d \hat{\underline{\theta}}} \quad (6-7.)$$

Ha most a szűrőt a jósági index korlátozás nélküli optimalizálásával terveztük, akkor az $\underline{a} = \underline{a}_0$ optimum helyen az \underline{a} vektor szerinti derivált zérus:

$$\left. \frac{\partial R[\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}(\hat{\underline{\theta}})]}{\partial \underline{a}} \right|_{\underline{a} = \underline{a}_0} = \underline{0}^T \quad (6-8.)$$

vagyis az érzékenységi függvény

$$\left. \frac{d R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}})}{d \hat{\underline{\theta}}} \right|_{\underline{a} = \underline{a}_0} = \left. \frac{\partial R[\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}(\hat{\underline{\theta}})]}{\partial \hat{\underline{\theta}}} \right|_{\underline{a} = \underline{a}_0} \quad (6-9.)$$

A (6-9.) összefüggés azt mutatja, hogy az optimum helyén a paraméter-becslés szerinti érzékenység csak akkor különbözik zérustól, ha a jósági index közvetlenül is (nem csak a szűrő-paramétereken keresztül) függ a környezeti paraméterek becslésétől. Ez az eredmény azért is érdekes, mert rámutat, hogy kis becslési hibák - szemben a kézenfekvő hiedelemmel - első-sorban nem azért befolyásolják a jósági indexet, mert a szűrő-mátrixot elviszik az optimumtól. Másrészt az is látható, hogy (az optimum környezetében) az érzékenység szempontjából érdek-

telen, hogyan függenek az \underline{a} szűrő-paraméterek a $\hat{\underline{\theta}}$ becslésektől.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az \underline{a} szűrő-paramétereknek egy ϕ lineáris egyenlőség-korlátot kell kielégíteniük. Az egyenlőség-korlát együtthatói a környezeti paraméterek becslései, tehát

$$\phi(\underline{a}, \hat{\underline{\theta}}) = \underline{0} \quad (6-10.)$$

Az \underline{a} vektor két részre bontható, s az egyik rész a korláton keresztül meghatározza a másikat:

$$\underline{a}_2 = \phi_2(\underline{a}_1, \hat{\underline{\theta}}) \quad (6-11.)$$

A jósági index most a paraméterek korlátozott $R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)$ függvénye; ez a korlátozás nélküli $R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a})$ függvényből a (6-11.) korlát segítségével származtatható:

$$R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1) = R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1, \underline{a}_2) \Big|_{\underline{a}_2 = \phi_2(\underline{a}_1, \hat{\underline{\theta}})} \quad (6-12.)$$

Az R_C index érzékenysége a környezeti paraméterek becslése szerint:

$$\frac{d R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)}{d \hat{\underline{\theta}}} = \frac{\partial R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)}{\partial \hat{\underline{\theta}}} + \frac{\partial R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)}{\partial \underline{a}_1} \frac{d \underline{a}_1}{d \hat{\underline{\theta}}} \quad (6-13.)$$

ahol figyelembe vettük, hogy $\underline{a}_1 = \underline{a}_1(\hat{\underline{\theta}})$. Az $\underline{a}_1 = \underline{a}_{1C}$ korlátozott optimum helyen R_C deriváltja \underline{a}_1 szerint zérus:

$$\left. \frac{\partial R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)}{\partial \underline{a}_1} \right|_{\underline{a}_1 = \underline{a}_{1C}} = \underline{0}^T \quad (6-14.)$$

tehát

$$\left. \frac{d R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)}{d \hat{\underline{\theta}}} \right|_{\underline{a}_1 = \underline{a}_{1C}} = \left. \frac{\partial R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)}{\partial \hat{\underline{\theta}}} \right|_{\underline{a}_1 = \underline{a}_{1C}} \quad (6-15.)$$

A (6-15.) összefüggés jobb oldala (6-12.) segítségével visszavezethető a korlátozás nélküli jósági indexre:

$$\left. \frac{\partial R_C(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1)}{\partial \hat{\underline{\theta}}} \right|_{\underline{a}_1 = \underline{a}_{1C}} = \left[\frac{\partial R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1, \underline{a}_2)}{\partial \hat{\underline{\theta}}} + \frac{\partial R(\underline{\theta}, \hat{\underline{\theta}}, \underline{a}_1, \underline{a}_2)}{\partial \underline{a}_2} \frac{\partial \underline{a}_2}{\partial \hat{\underline{\theta}}} \right]_{\substack{\underline{a}_1 = \underline{a}_{1C} \\ \underline{a}_2 = \phi_2(\underline{a}_1, \hat{\underline{\theta}})}} \quad (6-16.)$$

A (6-15.) összefüggés azt mutatja, hogy a korlátozott optimum helyén a korlátozott jósági index zérus érzékenységu valamely paraméter-beclsésre nézve, ha közvetlenül nem függ az adott beclséstől (csak az \underline{a}_1 szűrő-paramétereken keresztül). A (6-16.) összefüggés szerint ez akkor teljesül, ha a szóbanforgó paraméter-beclsés sem a korlátozatlan jósági index kifejezésében, sem az egyenlőség-korlátban nem jelenik meg (\underline{a}_1 -en kívül). Ugyanakkor a (6-16.) formula felhasználható zérustól különböző érzékenységi függvények effektív kiszámítására is.

6.4. Részletes érzékenységi vizsgálatok

A dolgozatban tárgyalt szűrési algoritmus kapcsán négy körülmény vet fel érzékenységi problémákat:

- a folyamat paramétereinek beclsése eltér azok valódi értékétől;
- a mérési zaj korrelációs mátrixának beclsése eltér annak valódi értékétől;
- a zaj nem zérus várható értékü;
- a zaj időben nem korrelálatlan.

A következőkben a jósági indexnek az e hatásokra vonatkozó érzékenységét fogjuk megvizsgálni. Az érzékenységi függvények általános formális levezetése meglehetősen hosszadalmas lenne, és végül se mindig vezetne számításra közvetlenül alkalmas formulákra. Ezért ebben az alfejezetben főleg minőségi megállapításokat fogunk tenni, és ezek kapcsán utalunk a számítási nehézségek forrásaira is. Kivétel a zaj várható értéke szerinti érzékenység, amely formálisan is viszonylag egyszerűen kezelhető. A 6.6.alfejezetben majd egy könnyebben áttekinthető elemi rendszeren megmutatjuk a konkrét érzékenységi függvényeket is.

Az első két hatás kapcsán a megfelelő paraméter-beclsés szerinti érzékenységet kell elemezni. A második két hatásra nézve viszont a jósági index nem függvénye a szóbanforgó paraméterek beclsésének (e paramétereket zérusnak tekintjük és a

szűrő-tervezés során egyáltalán nem vesszük figyelembe), így itt csak a valódi paraméterek szerinti érzékenység vizsgálható.

További kérdés, hogy a \underline{Q} (MV) és \underline{R} (LN) jósági indexek egyenértékűsége az érzékenységi vizsgálatok körülményei között is fennáll-e, vagyis hogy a két index érzékenysége azonos-e. Ezt az egyes hatásokra vonatkozóan külön-külön meg fogjuk vizsgálni.

Vizsgálatainkban a következő alapvető egyenletekből fogunk kiindulni:

Az LN jósági index (4-4.) illetve (4-25.) formája:

$$\underline{R} = E\{\underline{\hat{x}}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{\hat{x}}(t)\} = E\{\underline{\mu}^T(t) \underline{A}^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A} \underline{\mu}(t)\} \quad (6-17.)$$

Az MV jósági index (4-3.) és (4-5.) formája:

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= E\{[\underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t)]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t)]\} = \\ &= \underline{R} + E\{\underline{x}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{x}(t)\} - 2E\{\underline{x}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{\hat{x}}(t)\} \end{aligned} \quad (6-18.)$$

Az egyenlet-hiba (3-22.) formája:

$$\underline{\mu}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{\hat{K}}_i z^{-i} [\underline{x}(t) + \underline{\xi}(t)] - \sum_{i=1}^n \underline{\hat{K}}_i z^{-i} \underline{A} \underline{\mu}(t) \quad (6-19.)$$

Az egyenlőség-korlát (4-22.) és (4-24.) formája:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_u \\ \underline{A}_y \end{bmatrix}; \quad \underline{A}_y = \underline{\hat{G}}_0 \underline{A}_u - \underline{I} \quad (6-20.)$$

A (6-19.) és (6-20.) egyenletekben már azt is figyelembe vettük, hogy a \underline{K}_i illetve \underline{G}_0 paraméterek becslésükkel szerepelnek. Valódi értékével jelenik meg viszont a \underline{P}_{ξ} mátrix a (6-17.) és (6-18.) definíciókban. Ez utóbbi körülmény némi magyarázatot igényel. A jósági indexek formálisan definiálhatók akár a \underline{P}_{ξ} mátrix valódi értéke, akár annak becslése szerinti súlyozással. Mi a valódi érték szerinti súlyozást éreztük természetesebbnek, mivel ez vezet(ne) a jósági indexnek is a valódi értékére. Ezt a valódi értéket pontosan kiszámítani általában nem lehet (mivel a \underline{P}_{ξ} mátrixnak csak a becslése áll rendelkezésre), de az vizsgálható, hogy hogyan változik különböző körülmények hatására (például éppen a \underline{P}_{ξ} mátrix

valódi értékének vagy becslésének megváltozásakor).

6.4.1. A folyamat-paraméterek becslési hibájának hatása

Feladatunk most a jósági index érzékenységeinek vizsgálata a \hat{K}_i paraméter-becslések szerint.

Tekintsük először az R indexet. A (6-17.) és (6-19.) egyenletekből látható, hogy az R jósági index az A szűrő-mátrix közvetítése nélkül is függ a \hat{K}_i ($i=0\dots n$) mátrixoktól, mégpedig a $\underline{u}(t)$ egyenlet-hibán keresztül. A (6-20.) egyenlet pedig azt mutatja, hogy az egyenlőség-korlát tartalmazza a \hat{G}_0 mátrixot (a \hat{K}_0 mátrix részét).

Irjuk át először az egyenlet-hiba kifejezését. A valódi rendszerváltozók a becsült paraméter-mátrixokkal nem elégítik ki a rendszer-egyenletet, ezért az $\underline{x}(t)$ vektort most $\underline{u}(t)$ kifejezéséből kiküszöbölni nem lehet. Felírható viszont az egyenlet az alábbi formában:

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n (\hat{K}_i - K_i) z^{-i} \underline{x}(t) + \sum_{i=0}^n \hat{K}_i z^{-i} \underline{\xi}(t) - \sum_{i=1}^n \hat{K}_i z^{-i} A \underline{u}(t) \quad (6-21.)$$

Ezt a kifejezést a (6-17.) egyenletbe helyettesítve az R jósági indexet az $\underline{x}(t)$, $\underline{\xi}(t)$ és $\underline{u}(t)$ vektorokból képzett kvadrátikus formák várható értékének összegeként kapjuk. Ezek után a (6-21.) egyenlet jobboldala egyes tagjainak vizsgálata alapján a következők mondhatók arról a hatásról, amelyet \hat{K}_i megváltozása (illetve K_i -től való eltérése) $\underline{u}(t)$ -n keresztül R -re kifejt:

- a/ Az első tag olyan hatást ír le, amely az $\underline{x}(t)$ valódi rendszerváltozók négyzetével arányos. Ez a hatás azonban a lineáris érzékenységi függvényben nem jelenik meg, mivel ebben együttthatója a $\hat{K}_i = K_i$ helyen zérus.
- b/ A második tag a $\underline{\xi}(t)$ zaj négyzetes várható értékével arányos hatást eredményez.
- c/ A harmadik tag olyan hatásokat eredményez, amelyek a $\underline{u}(t)$ egyenlet-hiba különböző eltolásokhoz tartozó korrelációs mátrixaival arányosak. Ez nem lényegi többlet az a/ és b/ pontokhoz képest, mivel az egyenlet-hiba $\underline{x}(t)$ és

$\underline{\xi}(t)$ függvénye, de a korrelációs mátrixok jelenléte lényegesen bonyolítja a számításokat.

d/ A kereszthatások (az egyes tagok vegyes szorzatai) ki-küszöbölődnek a várható-érték képzéskor illetve visszavezethetők az a, b, c esetekre.

e/ A harmadik tagban $\underline{\mu}(t)$ maga is függ a $\hat{\underline{K}}_i$ mátrixoktól. Ezért a deriválás rekurzív összefüggésekre vezet, ami az érzékenységi függvények általános zárt formában való felírását lehetetlenné teszi.

Tekintsük most az érzékenységi függvény másik részét, az egyenlőség-korlát hatását. Ez viszonylag könnyen kiértékelhető, mivel \underline{R} deriváltja \underline{A}_y szerint a (6-17.) egyenletből illetve \underline{A}_y deriváltja $\hat{\underline{G}}_0$ szerint a (6-20.) egyenletből egyszerűen megkapható.

Végül vizsgáljuk meg, hogy a \underline{Q} jósági index $\hat{\underline{K}}_i$ szerinti érzékenysége megegyezik-e \underline{R} érzékenységével. Ehhez a 4-2. alfejezet gondolatmenetét kell követnünk, figyelembe véve, hogy az egyenlet-hibát most a (6-21.) egyenlet írja le. Behelyettesítve látható, hogy a (4-7.) illetve (4-10.) egyenletek - \underline{K}_0 helyett $\hat{\underline{K}}_0$ -val - most is fennállnak; mivel az egyenlőség-korlát is $\hat{\underline{K}}_0$ -re vonatkozik, a (4-13.) összefüggés is igaz (vagyis $Q = R + k - m$). A két jósági index különbsége tehát nem függ a $\hat{\underline{K}}_i$ becslésektől, vagyis érzékenységük azonos.

6.4.2. A zaj kovariancia-mátrix becslési hibájának hatása

Tekintsük most a jósági indexek érzékenységét $\hat{\underline{P}}_\xi$ szerint. Láthatóan a $\hat{\underline{P}}_\xi$ becslés nem szerepel a jósági indexekben (sem a (6-17.) illetve (6-18.) formulákban, sem pedig $\underline{\mu}(t)$ kifejezésben). Nem tartalmazza a $\hat{\underline{P}}_\xi$ becslést a (6-20.) egyenlőség-korlát sem. Így a jósági indexek lineáris érzékenysége $\hat{\underline{P}}_\xi$ szerint (a korlátozott optimum helyén) zérus.

Megjegyzendő, hogy ha a jósági indexeket a zaj-kovarianciák becslése szerinti súlyozással definiáljuk, akkor természetesen a $\hat{\underline{P}}_\xi$ becslésre vonatkozó érzékenység nem zérus, sőt az \underline{R} és \underline{Q} indexek érzékenysége eltérő.

6.4.3. A zaj zérustól különböző várható értékének hatása

Tekintsük most azt az esetet, amikor a $\underline{\xi}(t)$ mérési zaj várható értéke nem zérus. Mint látni fogjuk, a jósági index megváltozása a zaj várható értékének kvadratikus kifejezéseitől függ. Így a zaj várható értéke szerinti lineáris érzékenység zérus, a várható érték négyzete szerinti érzékenység definiálása viszont felesleges bonyodalmat jelent. Ezért közvetlenül a jósági index megváltozását fogjuk vizsgálni.

A zérustól különböző várható értékű zaj kétféle módon származtatható a zérus várható értékű esetből. Az elvileg különböző két szituáció némiképp eltérő formális eredményekre is vezet. A következőkben mindkét szituációt bemutatjuk. Megjegyzendő, hogy numerikus és szimulációs vizsgálatok tanúsága szerint (lásd a 9. Fejezetet) a két megközelítés között gyakorlatilag lényeges eltérés nincs.

Azt is meg fogjuk mutatni, hogy a zaj várható értéke az \underline{R} és \underline{Q} jósági indexeket eltérő módon befolyásolja.

Tekintsük az első szituációt. Induljunk ki egy zérus várható értékű $\underline{\xi}_0(t)$ zajból; ennek korrelációs (és kovariancia) mátrixa $\underline{P}_{\xi_0} = E\{\underline{\xi}_0(t)\underline{\xi}_0^T(t)\}$. Az \underline{R} jósági index a (6-17.) formula szerint számítható:

$$\underline{R}_0 = E\{\hat{\underline{\xi}}_0^T(t) \underline{P}_{\xi_0}^{-1} \hat{\underline{\xi}}_0(t)\} \quad (6-22.)$$

Adjunk most a $\underline{\xi}_0(t)$ zajhoz egy $\Delta\underline{\xi}$ állandót. Az így kapott $\underline{\xi}_0(t) + \Delta\underline{\xi}$ zaj már nem zérus várható értékű, hanem

$$E\{\underline{\xi}_0(t) + \Delta\underline{\xi}\} = \Delta\underline{\xi} \quad (6-23.)$$

korrelációs mátrixa pedig

$$\underline{P}_{\xi} = E\{[\underline{\xi}_0(t) + \Delta\underline{\xi}][\underline{\xi}_0(t) + \Delta\underline{\xi}]^T\} = \underline{P}_{\xi_0} + \Delta\underline{\xi}\Delta\underline{\xi}^T \quad (6-24.)$$

A $\hat{\underline{\xi}}_0(t)$ zaj-becslés is megváltozik $\hat{\underline{\xi}}_0(t) + \Delta\hat{\underline{\xi}}$ -re; ennek várható értéke $\Delta\hat{\underline{\xi}}$. A megváltozott jósági index

$$\underline{R} = \underline{R}_0 + \Delta\underline{R} = E\{[\hat{\underline{\xi}}_0(t) + \Delta\hat{\underline{\xi}}]^T (\underline{P}_{\xi_0} + \Delta\underline{P}_{\xi})^{-1} [\hat{\underline{\xi}}_0(t) + \Delta\hat{\underline{\xi}}]\} \quad (6-25.)$$

Hogy a jósági index megváltozását értékelni tudjuk, válasszuk szét ez utóbbi kifejezésben a zérus várható értékű $\hat{\underline{\xi}}_0(t)$ -t

és az állandó $\hat{\underline{\xi}}$ -t tartalmazó tagokat:

$$R = E\{\hat{\underline{\xi}}_O^T(t)(\underline{P}_{\xi O} + \Delta \underline{P}_{\xi})^{-1} \hat{\underline{\xi}}_O(t)\} + \Delta \underline{\xi}^T (\underline{P}_{\xi O} + \Delta \underline{P}_{\xi})^{-1} \Delta \underline{\xi} \quad (6-26.)$$

Vizsgáljuk először a jobb oldal második tagját; ez írja le $\Delta \underline{\xi}$ közvetlen hatását. E tagban $\Delta \underline{P}_{\xi}$ mint másodrendű hatás elhanyagolható, $\Delta \underline{\xi}$ pedig a (3-27.) egyenletből kapható a $z=1$ helyen:

$$\Delta \underline{\xi} = \underline{A} [\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i \underline{A}]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i \Delta \underline{\xi} = \underline{B} \Delta \underline{\xi} \quad (6-27.)$$

A jobb oldal első tagjában az a közvetett hatás tükröződik, hogy $\Delta \underline{\xi}$ miatt a korrelációs mátrix is változik. Ez a tag \underline{R} -nek \underline{P}_{ξ} szerinti megváltozását tartalmazza:

$$E\{\hat{\underline{\xi}}_O^T(t)(\underline{P}_{\xi O} + \Delta \underline{P}_{\xi})^{-1} \hat{\underline{\xi}}_O(t)\} \approx R_O + \sum_{i=1}^{k+m} \sum_{j=1}^{k+m} \frac{\partial R}{\partial p_{ij}} \Delta p_{ij} \quad (6-28.)$$

ahol p_{ij} a \underline{P}_{ξ} mátrix ij -edik eleme. Ebből a (6-24.), (6-26.) és (6-27.) eredményt is figyelembe véve

$$\Delta R \approx \Delta \underline{\xi}^T \underline{B}^T \underline{P}_{\xi O}^{-1} \underline{B} \Delta \underline{\xi} + \Delta \underline{\xi}^T \frac{dR}{d\underline{P}_{\xi}} \Delta \underline{\xi} \quad (6-29.)$$

A \underline{Q} jósági indexben (lásd a (6-18.) összefüggést) $\hat{\underline{\xi}}_O(t)$ helyett $\underline{\xi}_O(t) - \hat{\underline{\xi}}_O(t)$ áll, így $\underline{B} \Delta \underline{\xi}$ helyett $(\underline{I} - \underline{B}) \Delta \underline{\xi}$ irandó és természetesen a p_{ij} szerinti deriváltak is mások. Ezzel

$$\Delta Q \approx \Delta \underline{\xi}^T (\underline{I} - \underline{B})^T \underline{P}_{\xi O}^{-1} (\underline{I} - \underline{B}) \Delta \underline{\xi} + \Delta \underline{\xi}^T \frac{dQ}{d\underline{P}_{\xi}} \Delta \underline{\xi} \quad (6-30.)$$

Egyébként a 4. Függelék (F4-18.) összefüggése alapján írható, hogy

$$\frac{dR}{d\underline{P}_{\xi}} = \frac{d}{d\underline{P}_{\xi}} E\{\hat{\underline{\xi}}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} = -\underline{P}_{\xi}^{-1} E\{\hat{\underline{\xi}}(t) \hat{\underline{\xi}}^T(t)\} \underline{P}_{\xi}^{-1} \quad (6-31.)$$

Hasonlóan

$$\frac{dQ}{d\underline{P}_{\xi}} = -\underline{P}_{\xi}^{-1} E\{[\underline{\xi}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t)][\underline{\xi}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t)]^T\} \underline{P}_{\xi}^{-1} \quad (6-32.)$$

Tekintsük most a második szituációt. Induljunk ki egy $\underline{\xi}(t)$ zajból, amelynek ismert a \underline{P}_{ξ} korrelációs mátrixa. Tételezzük fel először, hogy $\underline{\xi}(t)$ várható értéke zérus: így a $\underline{\mathbb{I}}_{\xi} = E\{[\underline{\xi} - E(\underline{\xi})][\underline{\xi} - E(\underline{\xi})]^T\}$ korrelációs mátrixra fennáll, hogy $\underline{\mathbb{I}}_{\xi} = \underline{P}_{\xi}$, másrészt az \underline{R} jósági index meghatározható a (6-22.) formula szerint. Jelöljük az így nyert mennyiségeket $\underline{\mathbb{I}}_{\xi O}$ -al illetve R_O -al. Valójában azonban legyen

$$E\{\underline{\xi}(t)\} = \underline{\xi}_e \neq \underline{0} \quad (6-33.)$$

Ezért a valószínűségi kovariancia-mátrix nem $\underline{\Pi}_{\xi 0}$ hanem

$$\underline{\Pi}_{\xi} = E\{[\underline{\xi}(t) - \underline{\xi}_e][\underline{\xi}(t) - \underline{\xi}_e]^T\} = \underline{\Pi}_{\xi 0} - \underline{\xi}_e \underline{\xi}_e^T \quad (6-34.)$$

és a valószínűségi jósági index sem R_0 , hanem

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \Delta R = E\{[\hat{\underline{\xi}}(t) - \hat{\underline{\xi}}_e + \hat{\underline{\xi}}_e]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\hat{\underline{\xi}}(t) - \hat{\underline{\xi}}_e + \hat{\underline{\xi}}_e]\} = \\ &= E\{[\hat{\underline{\xi}}(t) - \hat{\underline{\xi}}_e]^T \underline{P}_{\xi}^{-1} [\hat{\underline{\xi}}(t) - \hat{\underline{\xi}}_e]\} + \hat{\underline{\xi}}_e^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \hat{\underline{\xi}}_e \quad (6-35.) \end{aligned}$$

Célunk annak vizsgálata, hogy az $R=R_0$ feltételezéssel milyen hibát követtünk el. A (6-35.) összefüggésben a jobb oldal második tagja azonos módon kezelhető, mint az első szituációban. Az első tagban most is egy közvetett hatás jelentkezik, nevezetesen hogy a zérus várható értékű bemenő-jel összetevő $\underline{\xi}_e$ -vel eltér az eredetileg feltételezettől. A jósági indexnek a (4-21.) formula (illetve a 8.Függelék (F8-23.) egyenlete) szerinti számításában e jel négyzetes várható értékei (vagyis a nem zérus várható értékű $\underline{\xi}(t)$ kovarianciái) szerepelnek, ezért közvetett hatásként az \underline{R} jósági indexnek a $\underline{\Pi}_{\xi}$ kovariancia-mátrix szerinti megváltozását kell figyelembe venni. Így

$$\Delta R \approx \underline{\xi}_e^T \underline{B}^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{B} \underline{\xi}_e - \underline{\xi}_e^T \frac{dR}{d\underline{\Pi}_{\xi}} \underline{\xi}_e \quad (6-36.)$$

Hasonlóan

$$\Delta Q \approx \underline{\xi}_e^T (\underline{I} - \underline{B})^T \underline{P}_{\xi}^{-1} (\underline{I} - \underline{B}) \underline{\xi}_e - \underline{\xi}_e^T \frac{dQ}{d\underline{\Pi}_{\xi}} \underline{\xi}_e \quad (6-37.)$$

Az (F8-23.) egyenletből látható egyébként az is, hogy a $\underline{\Pi}_{\xi}$ szerinti derivált maga az ott \underline{S} -sel jelölt mátrix (amely természetesen más-más lesz az \underline{R} és \underline{Q} indexekre vonatkozóan).

6.4.4. A zaj időbeli korreláltságának hatása

Ha a zaj időben korrelált, akkor a $\underline{P}_{\xi\xi}(\ell\Delta t) = E\{\underline{\xi}(t-\ell\Delta t)\underline{\xi}^T(t)\}$ korrelációs mátrixok $\ell \neq 0$ esetén is nullától különböző értékűek. Vizsgáljuk meg ennek hatását a jósági indexekre. Most sem a szigorúan vett lineáris érzékenységi függvényt fogjuk tekinteni, hanem a jósági index megváltozását.

Induljunk ki ismét a (6-17.) és (6-19.) egyenletekből.

$$R = E\{\underline{\mu}^T(t) \underline{A}^T \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{A} \underline{\mu}(t)\} \quad (6-38.)$$

$$\underline{\mu}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{\xi}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \underline{\mu}(t) \quad (6-39.)$$

Itt a (6-39.) formulában figyelembe vettük, hogy az $\underline{x}(t)$ valódi rendszer-változók az egyenlet-hiba kifejezéséből most kiesnek. Ha a (6-39.) formulát a (6-38.)-ba behelyettesítjük és formálisan elvégezzük a szorzást és kiküszöböljük a vegyes tagokat, akkor $E\{\underline{\xi}^T(t-l\Delta t) \underline{C}_l^* \underline{\xi}(t)\}$ $l=0; \pm 1; \pm 2; \dots$ alakú kifejezésekre jutunk, ahol \underline{C}_l^* a \underline{K}_i paraméterektől függő mátrix. Ezek a kifejezések, amelyek most nem tűnnek el az $l \neq 0$ esetekben, képviselik a zaj korreláltságának hatását az \underline{R} jósági indexre. Ugyanakkor azonban $E\{\underline{\mu}^T(t-l\Delta t) \underline{D}_l^* \underline{\mu}(t)\}$ típusú kifejezések is fellépnek (ahol \underline{D}_l^* szintén a \underline{K}_i paraméterek függvénye), amelyek miatt a jósági index bonyolult rekurzív módon függ a korreláltság hatását kifejező tagoktól. Ezért a jósági index megváltozására általános zárt kifejezést adni nem tudunk.

Tekintsük most a (6-18.) összefüggést:

$$\underline{Q} = \underline{R} + E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \underline{\xi}(t)\} - 2E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}_{\xi}^{-1} \hat{\underline{\xi}}(t)\} \quad (6-40.)$$

A jobb oldal második tagja most $k+m$, a harmadik tag azonban $-\hat{\underline{\xi}}(t) = \underline{A} \underline{\mu}(t)$ behelyettesítése után - szintén $E\{\underline{\xi}^T(t-l\Delta t) \underline{C}_l^* \underline{\xi}(t)\}$ típusú tagokat eredményez, amelyek az $l \neq 0$ esetekben nem küszöbölnének ki. Így tehát a \underline{Q} jósági index másképpen függ a zajok korreláltságától, mint az \underline{R} index.

6.5. Folytonos rendszerek diszkrét leírása: a közelítési hiba hatása

A gyakorlatban többnyire a megfigyelés tárgyát képező folyamat folytonos, s a szűrőt ennek valamilyen diszkrét leírása alapján méretezzük. A diszkrét leírás szükségszerűen mindig közelítő. Felvetődik a kérdés, hogy e közelítés hibája hogyan befolyásolja a szűrő jósági indexét. Ez a kérdés igen lényeges, mivel kihatással van a közelítési technika (téglalap-, trapéz-, stb. közelítés) megválasztására. Voltaképpen ez egy speciális

érzékenységi probléma, amely - mint látni fogjuk - a többi érzékenységi vizsgálathoz hasonló módon tárgyalható.

Magával a közelítési hibával kapcsolatban előre kell bocsátani, hogy az nagy mértékben függ a bemenő-jel tulajdonságaitól. Ezért valamely közelítési módszer hibájának abszolút értékelése csak konkrét, ismert (determinisztikus) bemenő-jel mellett lehetséges. Egyébként csak relatív értékelésre van lehetőség (egy pontatlanabb módszer összehasonlítására egy pontosabbal), s így is az eredmények függeni fognak a bemenő-jel bizonyos (statisztikus) tulajdonságaitól.

Hangsúlyozni kell azt is, hogy ha bármely két különböző folytonos-diszkrét rendszerre tervezünk szűrőket, azok ideális jósági indexei különbözők lesznek. Ez fennáll akkor is, ha a két rendszer ugyanazon folytonos folyamat diszkrét leírásai. Ezzel az eredendő különbséggel itt nem foglalkozunk, hanem csak azzal az eltéréssel, amely az ideális jósági indexre a folytonos rendszer pontatlan leírása következtében ráakódik.

Vizsgáljuk meg a téglalap-közelítés trapéz-közelítéshez viszonyított hibájának hatását. Legyenek \underline{K}_i^0 a téglalap-közelítés, \underline{K}_i^1 pedig a trapéz-közelítési rendszer-mátrixai ($i=0\dots n$). A kétféle közelítésre az átviteli függvények nevezője azonos, tehát

$$h_i^0 = h_i^1 \quad i=0\dots n \quad (6-41.)$$

ugyszintén a statikus erősítések is azonosak, vagyis

$$\sum_{i=0}^n \underline{G}_i^0 = \sum_{i=0}^n \underline{G}_i^1 \quad (6-42.)$$

Tételezzük fel, hogy a bemenő-jel két egymást követő mintavétel között lineárisan változik, vagyis a trapéz-leírás egzakt. Így a rendszer-egyenlet a trapéz-leírás együtthatóival teljesül:

$$\sum_{i=0}^n \underline{K}_i^1 z^{-i} \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (6-43.)$$

a téglalap-leírás együtthatóival azonban nem. Fennáll viszont - a (6-41.) és (6-43.) összefüggést is figyelembe véve - a következő:

$$\sum_{i=0}^n \underline{K}_i^0 z^{-i} \underline{x}(t) = \sum_{i=0}^n (\underline{G}_i^0 - \underline{G}_i^1) z^{-i} \underline{u}(t) \quad (6-44.)$$

Ez utóbbi kifejezés - (6-42.) felhasználásával - úgy is átírható, hogy az a bemenő-jelnek csak a megváltozásait tartalmazza:

$$\sum_{i=0}^n \underline{K}_i^O z^{-i} \underline{x}(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\underline{G}_j^O - \underline{G}_j^1) z^{-i} \Delta \underline{u}(t) \quad (6-45.)$$

ahol

$$\Delta \underline{u}(t) = (1 - z^{-1}) \underline{u}(t) \quad (6-46.)$$

Tekintsük most a $\underline{u}(t)$ egyenlet-hibát a \underline{K}_i^O mátrixokkal:

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{K}_i^O z^{-i} [\underline{x}(t) + \underline{\xi}(t)] - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i^O z^{-i} \underline{A} \underline{u}(t) \quad (6-47.)$$

Behelyettesítve például a (6-44.) eredményt:

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n (\underline{G}_i^O - \underline{G}_i^1) z^{-i} \underline{u}(t) + \sum_{i=0}^n \underline{K}_i^O z^{-i} \underline{\xi}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i^O z^{-i} \underline{A} \underline{u}(t) \quad (6-48.)$$

Mivel $\underline{u}(t)$ és $\underline{\xi}(t)$ függetlenek, a bemeneti közelítés hatása az egyenlet-hibában leválasztható

$$\Delta \underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n (\underline{G}_i^O - \underline{G}_i^1) z^{-i} \underline{u}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i^O z^{-i} \underline{A} \Delta \underline{u}(t) \quad (6-49.)$$

Ugyanugy a (6-45.) eredménnyel:

$$\Delta \underline{u}(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\underline{G}_j^O - \underline{G}_j^1) z^{-i} \Delta \underline{u}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{K}_i^O z^{-i} \underline{A} \Delta \underline{u}(t) \quad (6-50.)$$

Ezek után az \underline{R} jósági index $\Delta \underline{R}$ megváltozását úgy kapjuk meg, ha a fentiekben levezetett $\Delta \underline{u}(t)$ kifejezéseket behelyettesítjük a (6-17.) összefüggésbe. Ezzel egyrészt $E\{\underline{u}^T(t-\ell\Delta t) \underline{F}_\ell \underline{u}(t)\}$ illetve $E\{\Delta \underline{u}^T(t-\ell\Delta t) \underline{F}_\ell^* \Delta \underline{u}(t)\}$, másrészt $E\{\Delta \underline{u}^T(t-\ell\Delta t) \underline{D}_\ell^* \Delta \underline{u}(t)\}$ alakú tagokra jutunk. Láthatóan a jósági index megváltozása a bemenő-jeltől, pontosabban a bemenő-jel változástól függ annak különböző eltolásckhoz tartozó korrelációi útján. Mivel a bemenő-jel általában időben korrelált, a nem zérus eltoláshoz tartozó korrelációk nem tűnnek el. Egyébként - amint azt a szemlélet is sugallja - a bemenő-jel korreláltsága a közelítési hibát csökkenti a korrelálatlan esethez képest. (Extrémális esetben állandó bemenő-jel mellett a közelítési hiba zérus. Nem állandó, de erősen korrelált bemenő-jel mellett is jelentős hiba-csökkenés lehetséges.)

Megjegyzendő még, hogy ha a (6-18.) összefüggést most ΔQ -ra írjuk fel, akkor $\hat{\xi}(t)$ helyébe $\Delta \hat{\xi}(t) = \underline{A} \Delta \underline{u}(t)$ kerül. Mivel ez független $\hat{\xi}(t)$ -től, az utolsó tag zérus, így a \underline{Q} jósági index megváltozása megegyezik \underline{R} megváltozásával.

6.6. Elemi rendszer

A következőkben a 3.6. alfejezetben bevezetett és 4.10. alfejezetben tovább tárgyalt elemi rendszer kapcsán fogjuk bemutatni a konkrét érzékenységi vizsgálatokat. További egyszerűsítés végett legyen $g_1=0$ és $\underline{P}_{\xi}=\underline{I}$. Az érzékenységi függvények levezetése még így is meglehetősen hosszadalmas, ezért csak a főbb lépéseket fogjuk megadni.

6.6.1. A folyamat-paraméterek becslése szerinti érzékenység

A \hat{g}_0 és \hat{h}_1 paraméter-becslések szerinti érzékenységet vizsgáljuk a $\hat{g}_0=g_0$; $\hat{h}_1=h_1$ helyen, a korlátozott optimumban. A jósági index most zárt skalár formában felírható és így a lineáris érzékenységi függvényeket formális deriválással elő lehet állítani.

Az \underline{R} jósági index (4-59.) alapján

$$R = (a_1^2 + a_2^2) E\{\mu^2(t)\} \quad (6-51.)$$

a $\mu(t)$ egyenlet-hiba pedig (6-21.)-ből

$$\mu(t) = (\hat{g}_0 - g_0)u(t) - (\hat{h}_1 - h_1)y(t-\Delta t) + \hat{g}_0\omega(t) - v(t) - \hat{h}_1v(t-\Delta t) + \hat{h}_1a_2\mu(t-\Delta t) \quad (6-52.)$$

$$\text{Ebből} \\ E\{\mu^2(t)\} = \frac{1 + \hat{g}_0^2 + \hat{h}_1^2 + 2\hat{h}_1^2a_2}{1 - \hat{h}_1^2a_2^2} +$$

$$+ \frac{1}{1 - \hat{h}_1^2a_2^2} [(\hat{g}_0 - g_0)^2 E\{u^2(t)\} - 2(\hat{g}_0 - g_0)(\hat{h}_1 - h_1) E\{y(t-\Delta t)u(t)\} + (\hat{h}_1 - h_1)^2 E\{y^2(t)\}] + \\ + \frac{2a_2\hat{h}_1}{1 - \hat{h}_1^2a_2^2} [(\hat{h}_1 - h_1) E\{\mu(t)y(t)\} - (\hat{g}_0 - g_0) E\{\mu(t-\Delta t)u(t)\}] \quad (6-53.)$$

A (6-53.) kifejezés második sorában \hat{g}_0 illetve \hat{h}_1 szerinti deriválás után az együtthatók zérus értékűek a $\hat{g}_0=g_0$; $\hat{h}_1=h_1$ helyen, a harmadik sor pedig azért tűnik el, mert $\mu(t)$ független az $u(t)$ és $y(t)$ változóktól, ha $\hat{g}_0=g_0$ és $\hat{h}_1=h_1$. Így a közvetlen deriváltban (6-53)-nak csak az első tagját kell figyelembe venni:

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{g}_O} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{1 - h_1^2 a_2^2} 2g_O \quad (6-54.)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{h}_1} = \frac{(a_1^2 + a_2^2)^2}{(1 - h_1^2 a_2^2)^2} 2g_O^2 h_1 \quad (6-55.)$$

Másrészt az egyenlőség-korlát (6-20.) alapján és a_1 -re megoldva (mivel az R indexet egyszerűbb a_1 szerint deriválni):

$$a_1 = \frac{a_2 + 1}{\hat{g}_O} \quad (6-56.)$$

Láthatóan a korlát csak a \hat{g}_O becslést tartalmazza. Így a közvetett derivált:

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} \cdot \frac{da_1}{d\hat{g}_O} = 2a_1 E\{\mu^2(t)\} \cdot \left(-\frac{a_2+1}{g_O^2}\right) = -\frac{2a_1^2}{g_O} \cdot \frac{1+g_O^2+h_1^2+2h_1^2 a_2}{1 - h_1^2 a_2^2} \quad (6-57.)$$

Végül a teljes érzékenységi függvények:

$$\frac{dR}{d\hat{g}_O} = 2g_O \frac{a_1^2 + a_2^2}{1 - h_1^2 a_2^2} - \frac{2a_1^2}{g_O} \cdot \frac{1+g_O^2+h_1^2+2h_1^2 a_2}{1 - h_1^2 a_2^2} \quad (6-58.)$$

$$\frac{dR}{d\hat{h}_1} = 2g_O^2 h_1 \frac{(a_1^2 + a_2^2)^2}{(1 - h_1^2 a_2^2)^2} \quad (6-59.)$$

6.6.2. A zaj várható értéke szerinti érzékenység

A 6.4.3. alfejezet egyenleteiből indulunk ki és felhasználjuk a 4. Függelék (F4-18.) összefüggését. A formulák egyszerűsítése érdekében a levezetést az

$$\underline{A}_S = \frac{1}{1 + g_O^2} \begin{bmatrix} g_O \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6-60.)$$

szuboptimális szűrő-mátrixra végezzük.

A \underline{B} mátrix

$$\underline{B} = \frac{1}{1+g_O^2+h_1} \begin{bmatrix} g_O^2 & -g_O(1+h_1) \\ -g_O & 1+h_1 \end{bmatrix} \quad (6-61.)$$

$$\text{Ezzel } \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{B}} = \frac{1+g_o^2}{(1+g_o^2+h_1)^2} \begin{bmatrix} g_o^2 & -g_o(1+h_1) \\ -g_o(1+h_1) & (1+h_1)^2 \end{bmatrix} \quad (6-62.)$$

és

$$(\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{B}})^T \underline{\underline{P}}^{-1} (\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{B}}) = \frac{(1+h_1)^2+g_o^2}{(1+g_o^2+h_1)^2} \begin{bmatrix} 1 & g_o \\ g_o & g_o^2 \end{bmatrix} \quad (6-63.)$$

Másrészt

$$\eta_1 = \frac{h_1}{1+g_o^2} \quad \underline{\underline{\Gamma}}'_o = \frac{1}{1+g_o^2} \begin{bmatrix} g_o^2 & -g_o \\ -g_o & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Gamma}}'_1 = \frac{1}{1+g_o^2} \begin{bmatrix} 0 & -g_o h_1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Gamma}}''_o = \frac{1}{1+g_o^2} \begin{bmatrix} 1 & g_o \\ g_o & g_o^2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Gamma}}''_1 = \frac{1}{1+g_o^2} \begin{bmatrix} h_1 & g_o h_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-64.)$$

ahol $\underline{\underline{\Gamma}}'_o$ és $\underline{\underline{\Gamma}}'_1$ az $\underline{\underline{R}}$ jósági indexhez, $\underline{\underline{\Gamma}}''_o$ és $\underline{\underline{\Gamma}}''_1$ pedig a $\underline{\underline{Q}}$ jósági indexhez tartozó mátrixok. Az (F8-22.) formula alapján

$$R = \frac{1}{1-\eta_1^2} E\{\underline{\underline{\xi}}^T(t) (\underline{\underline{\Gamma}}'^T_o \underline{\underline{P}}^{-1}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_o - \eta_1 \underline{\underline{\Gamma}}'^T_o \underline{\underline{P}}^{-1}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_1 - \eta_1 \underline{\underline{\Gamma}}'^T_1 \underline{\underline{P}}^{-1}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_o + \underline{\underline{\Gamma}}'^T_1 \underline{\underline{P}}^{-1}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_1) \underline{\underline{\xi}}(t)\} \quad (6-65.)$$

Ebből

$$\frac{dR}{d\underline{\underline{P}}_{\xi}} = - \frac{1}{1-\eta_1^2} \underline{\underline{P}}^{-1}_{\xi} (\underline{\underline{\Gamma}}'^T_o \underline{\underline{P}}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_o - \eta_1 \underline{\underline{\Gamma}}'^T_o \underline{\underline{P}}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_1 - \eta_1 \underline{\underline{\Gamma}}'^T_1 \underline{\underline{P}}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_o + \underline{\underline{\Gamma}}'^T_1 \underline{\underline{P}}_{\xi} \underline{\underline{\Gamma}}'_1) \underline{\underline{P}}^{-1}_{\xi} =$$

$$= - \frac{g_o^2 + 1 - 2h_1\eta_1 + h_1^2}{(1-\eta_1^2)(1+g_o^2)^2} \begin{bmatrix} g_o^2 & -g_o \\ -g_o & 1 \end{bmatrix} \quad (6-66.)$$

hasonlóan

$$\frac{dQ}{d\underline{\underline{P}}_{\xi}} = - \frac{1}{(1-\eta_1^2)(1+g_o^2)} \begin{bmatrix} 1-2h_1\eta_1+h_1^2 & g_o(1-h_1\eta_1) \\ g_o(1-h_1\eta_1) & g_o^2 \end{bmatrix} \quad (6-67.)$$

illetve

illetve

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\xi} &= \frac{1}{1-\eta_1^2} (\Gamma_0' T_{P\xi}^{-1} \Gamma_0' - \eta_1 \Gamma_0' T_{P\xi}^{-1} \Gamma_1' - \eta_1 \Gamma_1' T_{P\xi}^{-1} \Gamma_0' + \Gamma_1' T_{P\xi}^{-1} \Gamma_1') = \\ &= \frac{1}{(1-\eta_1^2)(1+g_0^2)} \begin{bmatrix} g_0^2 & -g_0(1-h_1\eta_1) \\ -g_0(1-h_1\eta_1) & 1-2h_1\eta_1+h_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-68.)$$

és

$$\frac{dQ}{d\xi} = \frac{g_0^2 + 1 - 2h_1\eta_1 + h_1^2}{(1-\eta_1^2)(1+g_0^2)^2} \begin{bmatrix} 1 & g_0 \\ g_0 & g_0^2 \end{bmatrix} \quad (6-69.)$$

6.6.3. A zaj korreláltsága szerinti érzékenység

Példaként azt vizsgáljuk meg, hogyan befolyásolja a jósági indexet, ha a zaj Δt eltoláshoz tartozó $P_{\xi\xi}(\Delta t) = E\{\underline{\xi}(t-\Delta t)\underline{\xi}^T(t)\}$ korrelációs mátrixa nem zérus.

Tekintsük először az R indexet és induljunk ki a (6-51.) egyenletből:

$$R = (a_1^2 + a_2^2)E\{\mu^2(t)\} \quad (6-70.)$$

Az egyenlet-hiba (6-39.) alapján:

$$\mu(t) = \underline{K}_0 \underline{\xi}(t) + \underline{K}_1 \underline{\xi}(t-\Delta t) - \underline{K}_1 \underline{A}\mu(t-\Delta t) \quad (6-71.)$$

Behelyettesítve ez utóbbi kifejezést, összeszorzás és átrendezés után

$$\begin{aligned} R &= E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{C}_0 \underline{\xi}(t)\} + E\{\underline{\xi}^T(t-\Delta t) \underline{C}_1 \underline{\xi}(t)\} + \\ &+ E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{b}_0 \mu(t)\} + E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{b}_1 \mu(t-\Delta t)\} + d_0 E\{\mu^2(t)\} \end{aligned} \quad (6-72.)$$

A vegyes tagok kiküszöbölése után ez ilyen alakra hozható:

$$R = E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{C}_0^* \underline{\xi}(t)\} + E\{\underline{\xi}^T(t-\Delta t) \underline{C}_1^* \underline{\xi}(t)\} + d_0 E\{\mu^2(t)\} \quad (6-73.)$$

ahol a Δt -nél nagyobb eltoláshoz tartozó tagokat elhagytuk. Miután esetünkben $d_\ell = 0$, ha $\ell \neq 0$, a (6-73.) egyenlet egyszerűen megoldható R -re:

$$R = \frac{1}{1 - \frac{d_0^2}{a_1^2 + a_2^2}} \left[E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{C}_0^* \underline{\xi}(t)\} + E\{\underline{\xi}^T(t-\Delta t) \underline{C}_1^* \underline{\xi}(t)\} \right] \quad (6-74.)$$

Ebből ΔR_1 , a jósági index megváltozása $P_{\xi\xi}(\Delta t) \neq 0$ következtében az első tag elhagyásával nyerhető. Másrészt az \underline{A} , \underline{K}_0 és \underline{K}_1 mátrixok behelyettesítése és némi számolás után azt kapjuk, hogy

$$\underline{C}_1^* = 2(a_1^2 + a_2^2)h_1 \begin{bmatrix} a_2 g_0^2 & -a_2 g_0(1+a_2 h_1^2) \\ -g_0(1+a_2) & (1+a_2)(1+a_2 h_1^2) \end{bmatrix} \quad (6-75.)$$

$$d_0 = (a_1^2 + a_2^2)a_2^2 h_1^2 \quad (6-76.)$$

Igy

$$\Delta R_1 = \frac{1}{1 - a_2^2 h_1^2} E\{\underline{\xi}^T(t-\Delta t) \underline{C}_1^* \underline{\xi}(t)\} \quad (6-77.)$$

Tekintsük most a \underline{Q} indexet. A (6-40.) összefüggésből

$$Q = R + 2 - 2E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{A}\mu(t)\} \quad (6-78.)$$

Az előzőkhöz hasonló módon kifejtve ez utóbbi kifejezést azt kapjuk, hogy

$$Q = R + E\{\underline{\xi}^T(t-\Delta t) \underline{C}_1^{**} \underline{\xi}(t)\} \quad (6-79.)$$

ahol

$$\underline{C}_1^{**} = 2h_1 \begin{bmatrix} -g_0 a_1 a_2 & -g_0 a_2^2 \\ a_1(1+a_2) & a_2(1+a_2) \end{bmatrix} \quad (6-80.)$$

Igy a \underline{Q} jósági index megváltozása $P_{\xi\xi}(\Delta t) \neq 0$ miatt

$$\Delta Q = E\{\underline{\xi}^T(t-\Delta t) \left[\frac{1}{1-a_2^2 h_1^2} \underline{C}_1^* + \underline{C}_1^{**} \right] \underline{\xi}(t)\} \quad (6-81.)$$

6.6.4. A bemenő-jel közelítési hibájának hatása

Most az elemi rendszeren bemutatjuk a 6.5. alfejezetben tárgyalt hiba-vizsgálatot.

Az egyenlet-hiba megváltozása (6-49.) szerint

$$\Delta\mu(t) = (g_0^0 - g_0^1)u(t) - g_1^1 u(t-\Delta t) + h_1 a_2 \Delta\mu(t-\Delta t) \quad (6-82.)$$

a jósági index megváltozása pedig (6-51.) alapján

$$\Delta R = (a_1^2 + a_2^2) E\{\Delta \mu^2(t)\} \quad (6-83.)$$

Behelyettesítés és átrendezések után ΔR kifejezését az alábbi alakra lehet hozni:

$$\Delta R = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell} E\{u(t-\ell\Delta t)u(t)\} + d_0^* E\{\Delta \mu^2(t)\} \quad (6-84.)$$

ahol

$$f_0 = 2(a_1^2 + a_2^2)(g_1^1)^2(1 - h_1 a_2) \quad (6-85.)$$

$$f_{\ell} = -f_0(1 - h_1 a_2)(h_1 a_2)^{\ell-1} \quad \ell \neq 0 \quad (6-86.)$$

$$d_0^* = (a_1^2 + a_2^2)h_1^2 a_2^2 \quad (6-87.)$$

Itt felhasználtuk, hogy $g_0^0 = g_0^1 + g_1^1$. A (6-84.) egyenlet ΔR -re nézve megoldható:

$$\Delta R = \frac{1}{1 - h_1^2 a_2^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell} E\{u(t-\ell\Delta t) u(t)\} \quad (6-88.)$$

Miután h_1 és a_2 1-nél kisebb abszolút értékű negatív számok, mind $h_1 a_2$, mind pedig $(1-h_1 a_2)$ 1-nél kisebb pozitív számok. Így $f_0 > 0$ és $f_{\ell} < 0$ $\ell \neq 0$, vagyis az $u(t)$ korreláltságot kifejező $\ell \neq 0$ tagok az $\ell = 0$ tag hatását csökkentik, feltéve hogy $u(t)$ korrelációs sorozaat végig nem negatív.

*

A 9. Fejezetben kiterjedt szimulációs vizsgálatokról számolunk be a szűrő érzékenységére vonatkozóan. E vizsgálatok eredményei mind jellegükben, mind számszerűleg igen jó egyezést mutatnak a fentiekben levezetett összefüggésekkel.

7. HOLTIDŐS FOLYAMATOK

7.1. Bevezetés

Az eddigiek során hallgatólagosan feltételeztük, hogy a megfigyelés tárgyát képező folytonos-diszkrét rendszer holtidőt nem tartalmaz. Ez valójában nem mindig teljesül. A következőkben meg fogjuk vizsgálni, hogy a holtidő jelenléte milyen hatással van a szűrő tervezésére illetve viselkedésére és be fogunk mutatni egy transzformációs módszert, amelynek segítségével a holtidők - legalábbis a szűrő szempontjából - kiküszöbölhetők.

A rendszer \underline{k} számú bemenetét és \underline{m} számú kimenetét összesen $k \times m$ számú skalár folytonos-diszkrét átviteli függvény kapcsolja össze. A skalár átviteli függvények bármelyike lehet holtidős. A szűrőtervezés szempontjából - amint később látni fogjuk - csak azokat a rendszereket kell holtidősnek tekintenünk, amelyekben a valamely bemenethez illetve a valamely kimenethez kapcsolódó összes skalár átviteli függvény holtidős (bemeneti holtidő, 7.1.a.ábra illetve kimeneti holtidő, 7.1.b.ábra). Ha a \underline{j} -edik bemenet és az $\underline{\ell}$ -edik kimenet közti holtidő (a Δt mintavételi intervallum többszörösében kifejezve) $v_{\ell j}$, akkor a \underline{j} -edik bemeneti holtidő

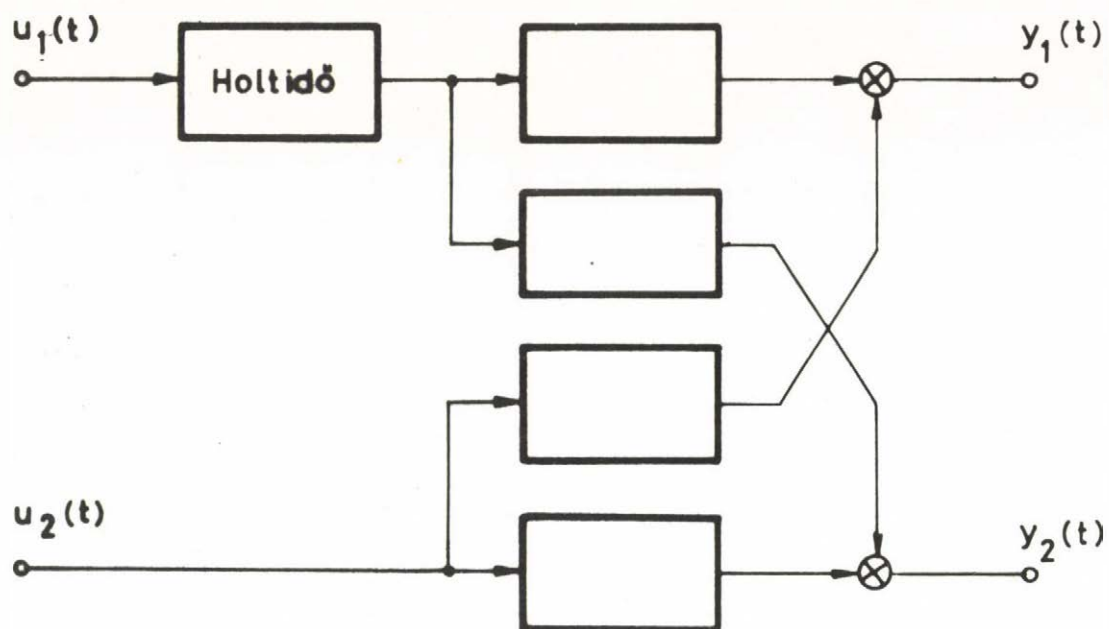
$$v_{\cdot j} = \min_{\ell} v_{\ell j} \quad 7-1.$$

az $\underline{\ell}$ -edik kimeneti holtidő pedig

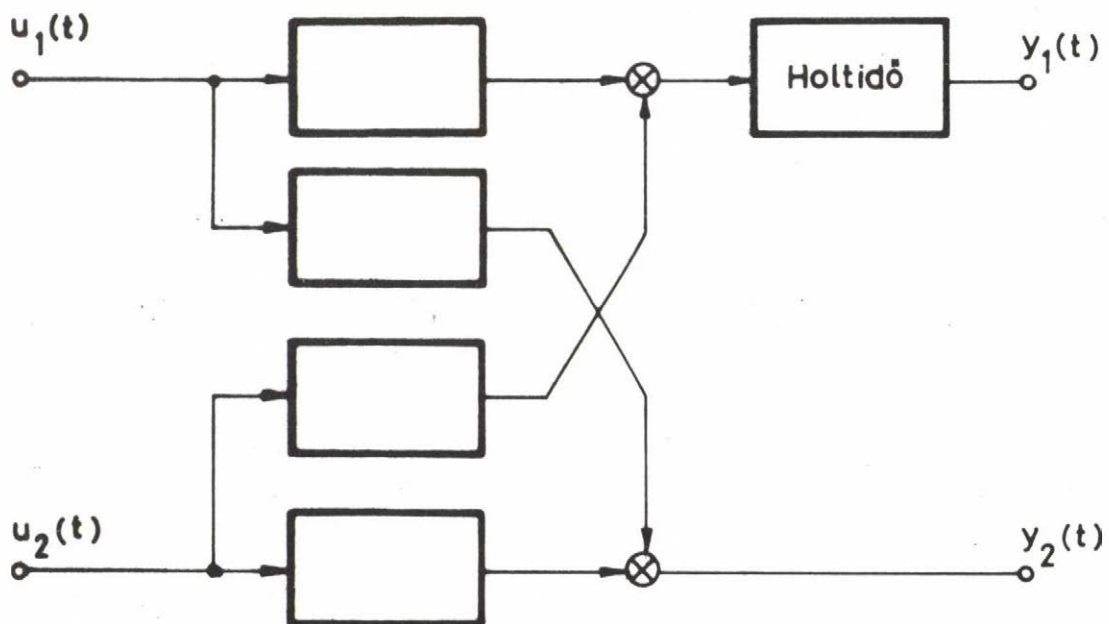
$$v_{\ell \cdot} = \min_j v_{\ell j} \quad 7-2.$$

Természetesen több bemenet illetve több kimenet is lehet egyszerre holtidős, és bemeneti és kimeneti holtidők együttesen is létezhetnek.

Ha a szűrő-tervezés alapjául szolgáló rendszer egy folytonos folyamat folytonos-diszkrét leírása, ez két okból lehet holtidős: vagy a folytonos folyamat maga is holtidős, vagy a diszkrét leírásban a bemenő-jelek közelítése holtidős jellegű.



a) BEMENETI HOLTIDŐ



b) KIMENETI HOLTIDŐ

A szűrő-tervezés szempontjából a kétféle holtidő között érde-
mi különbség nincsen.

7.2. A szűrő viselkedése holtidős rendszer esetén

A szűrő-tervezésnek az anyagmérleg-számításokból kölcsön-
zött alapgondolata az volt, hogy a mindenkori egyenlet-hibát
(egyensúly-hibát) osztjuk szét az azt létrehozó változók kö-
zött. Ezt fejezik ki a (3-12.), (3-13.) és (3-14.) egyenletek,
amelyeket itt megismétlünk:

$$\underline{u}(t) = \underline{K}_0 \tilde{\underline{x}}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \hat{\underline{x}}(t) \quad (7-3.)$$

$$\hat{\underline{x}}(t) = \tilde{\underline{x}}(t) - \hat{\underline{\xi}}(t) \quad (7-4.)$$

$$\hat{\underline{\xi}}(t) = \underline{A} \underline{u}(t) \quad (7-5.)$$

Emlékeztetünk rá, hogy $\underline{K}_0 = [\underline{G}_0 \quad -\underline{I}]$ és

$$\underline{G}_0 = \begin{vmatrix} g_{011} & \dots & g_{01k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{0m1} & \dots & g_{0mk} \end{vmatrix} \quad (7-6.)$$

ahol tehát a \underline{G} mátrix sorai az egyes kimenetekhez, oszlopai
pedig az egyes bemenetekhez tartoznak. Mármost ha a j -edik
bemenet holtidős, a \underline{G}_0 mátrix j -edik oszlopa csupa zérus ele-
met tartalmaz. Így az $u_j(t)$ bemenőjel pillanatnyi értéke nem
befolyásolja a $\underline{u}(t)$ egyenlet-hiba pillanatnyi értékét, korrek-
cióját mégis annak alapján számítjuk. Másrészt ha az ℓ -edik ki-
menet holtidős, a \underline{G}_0 mátrix ℓ -edik sora csupa zérus elemet tar-
talmaz. Így a $\mu_\ell(t)$ egyenlet-hiba pillanatnyi értéke nem függ
egyetlen bemenőjel pillanatnyi értékétől sem, az mégis szerepel
a korrekciók számításában. Tehát akár bemeneti, akár kimeneti
holtidő áll fenn, eltérünk a hiba-szétosztás alapgondolatától.
(A fenti gondolatmenetből egyébként az is látszik, hogy miért
csak teljes zérus oszlopok illetve sorok, vagyis teljes bemene-
ti illetve kimeneti holtidők okoznak nehézséget.)

Vizsgáljuk most meg a holtidő hatását az egyenlőség-korlátra.

Tekintsük először a (3-18.) egyenletet:

$$\underline{u}(t) - \underline{K}_0 \hat{\underline{x}}(t) = \underline{0} \quad (7-7.)$$

Ha a j -edik bemenet holtidős, $u_j(t)$ korrekciójára nézve a (7-7.) egyenlet zérus együtthatóju és így nem ad korlátozást. Ha viszont az ℓ -edik kimenet holtidős, a $\mu_\ell(t)$ hiba zérus együtthatóval szerepel a (7-7.) egyenletben. Hasonló következtetések vonhatók le a szűrő-mátrixra vonatkozó egyenlőség-korlátból is. A (4-23.) egyenlet szerint

$$\underline{G}_0 \underline{A}_u - \underline{A}_y = \underline{I} \quad (7-8.)$$

Ha a \underline{G}_0 j -edik oszlopa zérus, \underline{A}_u j -edik sorára nincs korlátozás, illetve ha \underline{G}_0 ℓ -edik sora zérus, \underline{A}_u ℓ -edik oszlopa szabad.

A szűrő formálisan megtervezhető persze akkor is, ha a rendszer holtidős. A szuboptimális szűrő-mátrixban az egyenlőség-korlátból kieső sorok és oszlopok zérusra adódnak, ha a zajok \underline{P}_ξ korrelációs mátrixa diagonális. Ez szélső esetben, ha valamennyi bemenet (illetve kimenet) holtidős, a triviális megoldásra vezet. Ha a \underline{P}_ξ mátrix nem diagonális, a szuboptimális szűrő-mátrix szóbanforgó elemei csak a keresztkorrelációktól függenek, vagyis - más információ hiányában - az egyenletekben nem szereplő zajokat a korrelációs mátrix alapján becsüljük. Az optimális szűrő-mátrix minden eleme általában zérustól különböző illetve nemcsak a keresztkorrelációktól függ, de a holtidőhöz tartozó sorok és oszlopok most sem vesznek részt az egyenlőség-korlát kielégítésében.

7.3. Holtidő-transzformáció

Az elmondottakból látható, hogy célszerű holtidős rendszerekben egy olyan transzformációt végrehajtani, amely a holtidőt a szűrő szempontjából kiküszöböli. A transzformáció lényege az, hogy a hiba-elosztásban nem az azonos időpillanathoz tartozó, hanem a holtidőknek megfelelően eltolt változó- és hiba-értékek vesznek részt. Bemeneti holtidő esetén nem a pillanatnyi, hanem

a megfelelő korábbi bemenő-jel értéket korrigáljuk (illetve minden bemenő-jel értéket akkor korrigálunk, amikor az először jelenik meg az egyenlet-hibában). Kimeneti holtidő esetén pedig nem a pillanatnyi, hanem a megfelelő későbbi egyenlet-hiba értéket használjuk fel (illetve a pillanatnyi értéket a korábbi változó-értékek korrekciójában vesszük figyelembe). A transzformált rendszerre a (7-3.), (7-4.) és (7-5.) egyenletek, valamint a szűrő-tervezés összes többi összefüggése változatlanul érvényesek.

Ha a j -edik bemenet holtideje v_j , akkor $u_j(t)$ transzformáltja

$$u_j^x(t) = z^{-v_j} u_j(t) \quad (7-9.)$$

A \underline{G} mátrixokat ennek megfelelően úgy kell transzformálni, hogy a j -edik oszlopot a \underline{G}_{v_j} mátrixból előreviszük a \underline{G}_0 mátrixba, a következő, \underline{G}_{v_j+1} mátrixból a \underline{G}_1 mátrixba, stb., az utolsó mátrixokba pedig zérus oszlopokat léptetünk be. Ha több bemenet holtidős, ezt a transzformációt mindegyikre el kell végezni.

Ha most az ℓ -edik kimenet holtideje v_ℓ , akkor $y_\ell(t)$ transzformáltja

$$y_\ell^x(t) = z^{v_\ell} y_\ell(t) \quad (7-10.)$$

Minthogy azonban ez fizikailag realizálhatatlan formára vezet, az egész rendszert vissza kell tolni a

$$v = \max_{\ell} v_\ell. \quad (7-11.)$$

maximális kimeneti holtidőnek megfelelően:

$$y_\ell^x(t) = z^{v_\ell - v} y_\ell(t) \quad (7-12.)$$

$$u_j^x(t) = z^{-v} u_j(t)$$

A \underline{G} mátrixokat most az ℓ -edik sor előre-mozgatásával kell transzformálni, a fent mondottakhoz hasonló módon. Miután az egyenlet-hiba lényegében a kimenő-jel hibája, $\underline{u}(t)$ együtt transzformálódik $\underline{y}(t)$ -vel.

Ha mind bemeneti, mind kimeneti holtidők vannak, az egyik

fajta transzformáció többnyire kiküszöböli a másik fajta holtidőt is. Ilyenkor célszerű először bemeneti transzformációt végrehajtani, mert az egyszerűbb. Ha mindkét fajta transzformáció szükséges, az azok végrehajtásával nyert rendszer független lesz a transzformációk sorrendjétől. Az itt mondottakat két példán is szemléltetni fogjuk.

A transzformált $\underline{\xi}^x(t)$ zaj-vektorhoz tartozó \underline{p}_{ξ}^x korrelációs mátrix különbözhet az eredeti \underline{p}_{ξ} mátrixtól, ha ez utóbbi nem diagonális. A $\underline{\xi}^x(t)$ vektor egyes elemei ugyanis időben eltoltak lehetnek egymáshoz képest, s ekkor keresztkorrelációjuk biztosan zérus.

A holtidő transzformáció végső célja a jósági index csökkentése. A 7.2. alfejezet megfontolásai valószínűsítik, hogy a transzformált rendszerhez tervezett optimális szűrő jobb lesz, mint amit az eredeti rendszer esetében el lehet érni. Formális bizonyítást azonban nem sikerült adni erre az állításra.

Példák

1. Legyenek a rendszer \underline{G} mátrixai az alábbiak:

$$\underline{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{022} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_1 = \begin{bmatrix} g_{111} & 0 \\ g_{121} & g_{122} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2 = \begin{bmatrix} g_{211} & g_{212} \\ g_{221} & g_{222} \end{bmatrix}$$

Láthatóan $v_{.1}=1$, $v_{.2}=0$, $v_{1.}=1$, $v_{2.}=0$, vagyis az első bemeneten és az első kimeneten egyszeres holtidő van.

Végezzünk először bemeneti transzformációt:

$$\underline{u}^x(t) = \begin{bmatrix} z^{-1}u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}^x(t) = \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_0^x = \begin{bmatrix} g_{111} & 0 \\ g_{121} & g_{022} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_1^x = \begin{bmatrix} g_{211} & 0 \\ g_{221} & g_{122} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2^x = \begin{bmatrix} 0 & g_{212} \\ 0 & g_{222} \end{bmatrix}$$

Láthatóan a bemeneti transzformáció hatására a kimeneti holtidő is eltűnt.

Végezzünk most az eredeti rendszeren kimeneti transzformációt:

$$\underline{u}^x(t) = z^{-1}\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} z^{-1}u_1(t) \\ z^{-1}u_2(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}^x(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ z^{-1}y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_0^x = \begin{bmatrix} g_{111} & 0 \\ 0 & g_{022} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_1^x = \begin{bmatrix} g_{211} & g_{212} \\ g_{121} & g_{122} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2^x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{221} & g_{222} \end{bmatrix}$$

Most a kimeneti transzformáció hatására a bemeneti holtidő is eltűnt, a transzformált rendszer azonban különbözik az előbbtől.

2. Legyenek most a \underline{G} mátrixok a következők:

$$\underline{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{022} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & g_{112} \\ g_{121} & g_{122} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2 = \begin{bmatrix} g_{211} & g_{212} \\ g_{221} & g_{222} \end{bmatrix}$$

Most is $v_{.1} = v_1. = 1$ és $v_{.2} = v_2. = 0$. Végezzünk először bemeneti transzformációt:

$$\underline{u}^x(t) = \begin{bmatrix} z^{-1}u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}^x(t) = \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_0^x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{121} & g_{022} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_1^x = \begin{bmatrix} g_{211} & g_{112} \\ g_{221} & g_{122} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2^x = \begin{bmatrix} 0 & g_{212} \\ 0 & g_{222} \end{bmatrix}$$

Láthatóan $v_1. = 1$ továbbra is, ezért - a transzformált rendszeren - egy kimeneti transzformáció is szükséges:

$$\underline{u}^{xx}(t) = z^{-1}\underline{u}^x(t) = \begin{bmatrix} z^{-2}u_1(t) \\ z^{-1}u_2(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}^{xx}(t) = \begin{bmatrix} \underline{y}^x(t) \\ z^{-1}\underline{y}^x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ z^{-1}y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_0^{xx} = \begin{bmatrix} g_{211} & g_{112} \\ g_{121} & g_{022} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_1^{xx} = \begin{bmatrix} 0 & g_{212} \\ g_{221} & g_{122} \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2^{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{222} \end{bmatrix}$$

Könnyen belátható, hogy azonos eredményre jutunk akkor is, ha a két transzformáció sorrendjét megfordítjuk.

8. MÉRETLEN VÁLTOZÓK

8.1. Bevezetés

Az eddigiek során feltételeztük, hogy valamennyi, a rendszeregyenletekben szereplő folyamat-változót mérjük. Ez azonban nem mindig igaz: lehetnek valódi folyamat-változók (akár bemenő-, akár kimenő-jelek), amelyek mérésére nincs lehetőség, és a rendszerzajok voltaképpen szintén méretlen (bemenő) folyamat-változók. A következőkben azt mutatjuk meg, hogy a javasolt szűrési algoritmus miként terjeszthető ki méretlen változókat is tartalmazó rendszerekre. Célunk most az lesz, hogy - a rendelkezésre álló információ alapján - becsüljük mind a mért, mind a méretlen folyamat-változókat.

Általában a valódi folyamat-változók determinisztikusak és zérustól különböző értékűek, a rendszerzajok viszont stochasztikusak zérus várható értékkel. Mindkét változót meg fogjuk vizsgálni, és megmutatjuk, hogy a célszerűen követendő eljárás a két esetben különböző. Előbb azonban levezetünk néhány általános összefüggést méretlen változókat is tartalmazó rendszerekre.

8.2. Általános összefüggések

Legyen $\underline{q}(t) = [q_1(t); \dots; q_\ell(t)]^T$ a méretlen változók vektora, $\underline{r}(t) = [r_1(t); \dots; r_{m+k-\ell}(t)]^T$ pedig a mért változók vektora; mind $\underline{q}(t)$, mind $\underline{r}(t)$ tartalmazhat elemeket mind az $\underline{u}(t)$ bemeneti, mind pedig az $\underline{y}(t)$ kimeneti vektorból. Ezzel a folyamat-változók $\underline{x}(t)$ vektora úgy is felírható, hogy

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{q}(t) \\ \underline{r}(t) \end{bmatrix} \quad (8-1.)$$

Ennek megfelelően bontsuk fel a \underline{K}_i együttható-mátrixokat is: tartalmazzák az \underline{L}_i mátrixok a $\underline{q}(t)$ változók együtthatóit, az \underline{M}_i mátrixok pedig az $\underline{r}(t)$ változókat. Ezzel a \underline{K}_i mátrixok

$$\underline{K}_i = [\underline{L}_i \quad \underline{M}_i] \quad i=0 \dots n \quad (8-2.)$$

formában írhatók át, ahol az \underline{L}_i mátrixok mérete $m \times \ell$ az \underline{M}_i mátrixoké pedig $m \times (m+k-\ell)$. Megjegyzendő, hogy a (8-1.) és (8-2.) átíráshoz az $\underline{x}(t)$ vektor és a \underline{K}_i mátrixok sorait is át kell általában rendezni, ezt azonban külön nem fogjuk jelölni.

$$\sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{x}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{L}_i z^{-i} \underline{q}(t) + \sum_{i=0}^n \underline{M}_i z^{-i} \underline{r}(t) = \underline{0} \quad (8-3.)$$

az egyenlet-hiba pedig (3-12.) mintájára

$$\underline{u}(t) = \underline{M}_0 \tilde{\underline{r}}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{L}_i z^{-i} \hat{\underline{q}}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{M}_i z^{-i} \hat{\underline{r}}(t) \quad (8-4.)$$

ahol figyelembe vettük, hogy $\underline{q}(t)$ -re nézve nincs mérés. Jelölje $\underline{k}(t)$ a mért változók mérési zaját (a \underline{k} vektor a \underline{x} vektor létező elemeit tartalmazza), $\hat{\underline{k}}(t)$ pedig azok korrekcióját; ezzel

$$\tilde{\underline{r}}(t) = \underline{r}(t) + \underline{k}(t) \quad (8-5.)$$

és

$$\hat{\underline{r}}(t) = \tilde{\underline{r}}(t) - \hat{\underline{k}}(t) \quad (8-6.)$$

és így

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{M}_i z^{-i} [\underline{r}(t) + \underline{k}(t)] - \sum_{i=1}^n \underline{M}_i z^{-i} \hat{\underline{k}}(t) + \sum_{i=1}^n \underline{L}_i z^{-i} \hat{\underline{q}}(t) \quad (8-7.)$$

A mért változók korrekcióját - a korábbiakkal összhangban - az egyenlet-hiba lineáris függvényeként számítjuk:

$$\hat{\underline{k}}(t) = \underline{A}_r \underline{u}(t) \quad (8-8.)$$

Amint a Bevezetésben mondtuk, most a méretlen változókat is becsülni kívánjuk. Mivel a (8-4.) szerint felírt egyenlet-hiba tartalmazza a méretlen változókból származó egyensúly-hiányt is, kézenfekvő ezek becslését is az egyenlet-hiba lineáris függvényeként keresni:

$$\hat{\underline{q}}(t) = -\underline{A}_q \underline{u}(t) \quad (8-9.)$$

(A 8-4. alfejezetben egyébként látni fogjuk, hogy egy eltérő megközelítés is ilyen lineáris formára vezet.) A negatív előjelet a (8-9.) formulában a mért változók korrekciójával való

egyöntetőség indokolja: v.ö. a (8-6.) és (8-8.) összefüggésekkel. A (8-8.) és (8-9.) definíciókkal az egyenlet-hiba

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{M}_i z^{-i} [\underline{r}(t) + \underline{k}(t)] - \sum_{i=1}^n (\underline{L}_i \underline{A}_q + \underline{M}_i \underline{A}_r) z^{-i} \underline{u}(t) \quad (8-10.)$$

Megoldva

$$\underline{u}(t) = \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n (\underline{L}_i \underline{A}_q + \underline{M}_i \underline{A}_r) z^{-i} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{M}_i z^{-i} [\underline{r}(t) + \underline{k}(t)] \quad (8-11.)$$

A 3.4. alfejezet gondolatmenetét követve ki kellene küszöbölni a folyamat-változók valódi értékeit az egyenlet-hiba kifejezéséből. Ez azonban most nem lehetséges, mivel a mért változók magukban nem elégítik ki a rendszeregyenletet, csak a méretlen változókkal együtt. Lehetséges viszont a mért változók helyettesítése a méretlen változókkal a (8-3.) rendszeregyenlet alapján:

$$\underline{u}(t) = \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n (\underline{L}_i \underline{A}_q + \underline{M}_i \underline{A}_r) z^{-i} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n z^{-i} [\underline{M}_i \underline{k}(t) - \underline{L}_i \underline{q}(t)] \quad (8-12.)$$

Láthatóan az egyenlet-hiba most nemcsak a mérési zajoktól, hanem a méretlen változók valódi értékeitől is függ.

Vonjuk össze a méretlen változókat és a mérési zajt egyetlen vektorba és - ennek megfelelően - a becslési mátrixokat is egyetlen mátrixba:

$$\underline{\phi}(t) = \begin{bmatrix} -\underline{q}(t) \\ \underline{k}(t) \end{bmatrix} \quad \hat{\underline{\phi}}(t) = \begin{bmatrix} -\hat{\underline{q}}(t) \\ \hat{\underline{k}}(t) \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_q \\ \underline{A}_r \end{bmatrix} \quad (8-13.)$$

Ezzel

$$\hat{\underline{\phi}}(t) = \underline{A} \underline{u}(t) \quad (8-14.)$$

és

$$\underline{u}(t) = \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{\phi}(t) \quad (8-15.)$$

Ez utóbbi összefüggések azonossága a 3. Fejezet eredményeivel szembeötlő: a (8-14.) formula a (3-14.) képletnek, a (8-15.) formula pedig a (3-26.) képletnek felel meg. Vizsgáljuk most meg a becslési hibát:

$$\underline{\psi}(t) = \hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\underline{q}}(t) - \underline{q}(t) \\ \hat{\underline{r}}(t) - \underline{r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{q}}(t) - \underline{q}(t) \\ \underline{k}(t) - \hat{\underline{k}}(t) \end{bmatrix} = \underline{\phi}(t) - \hat{\underline{\phi}}(t) \quad (8-16.)$$

ami viszont a (3-16.) eredménnyel egyenértékű. Így a 3. Fejezetben a becslési hibára levezetett összefüggések itt is alkalmazhatók, tehát - (3-34.) mintájára -:

$$\underline{\psi}(t) = [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0) \underline{\phi}(t) \quad (8-17.)$$

Meg kell viszont jegyezni, hogy most $\hat{\underline{\phi}}(t) \neq \tilde{\underline{x}}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$ (v.ö. a (3-13.) képlettel), legalábbis a \underline{q} változók vonatkozásában, egyszerűen mivel $\tilde{\underline{q}}(t)$ nem létezik.

Vizsgáljuk még meg az egyenlőség-korlátot. Most a (8-3) formában felírt rendszeregyenletnek kell a becsült változókra teljesülnie:

$$\sum_{i=0}^n \underline{L}_i z^{-i} \hat{\underline{q}}(t) + \sum_{i=0}^n \underline{M}_i z^{-i} \hat{\underline{r}}(t) = \underline{Q} \quad (8-18.)$$

Ebből a (8-4.), (8-6.), (8-8.) és (8-9.) összefüggések felhasználásával az egyenlőség-korlát

$$(\underline{L}_0 \underline{A}_q + \underline{M}_0 \underline{A}_r - \underline{I}) \underline{u}(t) = \underline{Q} \quad (8-19.)$$

vagyis

$$\underline{L}_0 \underline{A}_q + \underline{M}_0 \underline{A}_r - \underline{I} = \underline{Q} \quad (8-20.)$$

Figyelembe véve most a (8-2.) és (8-13.) definíciókat ez úgy is írható, hogy

$$\underline{K}_0 \underline{A} - \underline{I} = \underline{Q} \quad (8-21.)$$

vagyis ismét a szokásos formát kaptuk vissza (v.ö. a (3-20.) egyenlettel).

8.3. Stochasztikus méretlen bemenő-jelek

Tekintsük azt az esetet, amikor a méretlen változók stacionárius stochasztikus bemenő-jelek zérus várható értékkel. Ez a szituáció rendszerzajok jelenlétének felel meg. Tegyük fel, hogy a stochasztikus bemenő-jelek időben korrelálatlanok. Ez nem jelent megszorítást még akkor sem, ha a stochasztikus bemenő-jelek valójában időben korreláltak, mert a színes zajt egy fehér forrászajból előállító zaj-átviteli függvényeket a rendszeregyenletekbe bele lehet vonni.

A (8-16.) és (8-17.) egyenletekből kiolvasható, hogy a fenti feltevések mellett az $\underline{x}(t)$ változó-vektor becslése torzítatlan, függetlenül az \underline{A} mátrix megválasztásától. Az is látható, hogy definiálni lehet a

$$Q_\phi = E\{\underline{\psi}^T(t) \underline{P}_\phi^{-1} \underline{\psi}(t)\} \quad (8-22.)$$

és

$$R_\phi = E\{\hat{\underline{\phi}}^T(t) \underline{P}_\phi^{-1} \hat{\underline{\phi}}(t)\} \quad (8-23.)$$

jósági indexeket, ahol $\underline{P}_\phi = \underline{P}_{\phi\phi}(0) = E\{\underline{\phi}(t) \underline{\phi}^T(t)\}$ a $\underline{\phi}(t)$ vektor zérus eltoláshoz tartozó korrelációs (kovariancia) mátrixa. Az így definiált jósági indexekre a 4. Fejezetben bemutatott valamennyi eredmény és eljárás értelemszerűen alkalmazható, figyelembe véve természetesen a (8-13.) definíciókat.

Vizsgáljuk meg a szuboptimális szűrő-mátrixot. A (4-26.) eredmény alapján

$$\underline{A}_{S\phi} = \underline{P}_\phi \underline{K}_O^T (\underline{K}_O \underline{P}_\phi \underline{K}_O^T)^{-1} \quad (8-24.)$$

Tegyük fel, hogy a $\underline{q}(t)$ és $\underline{\kappa}(t)$ vektorok egymással korrelálatlanok; ekkor

$$\underline{P}_\phi = \begin{bmatrix} \underline{P}_q & \underline{Q} \\ \underline{Q} & \underline{P}_\kappa \end{bmatrix} \quad (8-25.)$$

ahol \underline{P}_q illetve \underline{P}_κ a megfelelő vektorok zérus eltoláshoz tartozó korrelációs mátrixai. Ezzel és figyelembe véve a (8-2.) és (8-13.) felbontásokat:

$$\underline{A}_{Sq} = \underline{P}_q \underline{L}_O^T (\underline{L}_O \underline{P}_q \underline{L}_O^T + \underline{M}_O \underline{P}_\kappa \underline{M}_O^T)^{-1} \quad (8-26.)$$

$$\underline{A}_{Sr} = \underline{P}_\kappa \underline{M}_O^T (\underline{L}_O \underline{P}_q \underline{L}_O^T + \underline{M}_O \underline{P}_\kappa \underline{M}_O^T)^{-1} \quad (8-27.)$$

8.4. Determinisztikus méretlen változók

Tekintsük most azt az esetet, amikor a méretlen változók nullától különböző értékű determinisztikus jelek. Ez a szituáció leginkább annak felel meg, hogy a valódi folyamat-változók egy részét nem mérjük. A determinisztikus méretlen változók pillanatnyi értéke természetesen nem ismert, statisztikus (átlag-jelle-gű) információk pedig általában nem állnak róluk rendelkezésre

(még ha vannak is ilyen információk, értelmezésük és felhasználásuk nehézségekbe ütközik, főként a stacionaritás hiánya miatt).

A 8.2. alfejezet eredményeiből kiolvasható, hogy a $\underline{\mu}(t)$ egyenlet-hiba, a $\hat{\underline{\phi}}(t)$ becslés és a $\underline{\psi}(t)$ becslési hiba függ a méretlen változóktól. Ha most ezek determinisztikusak, akkor ennek számos kellemetlen következménye van. Egyebek között a becslés ilyenkor általában torzított lesz. Továbbá a (8-22.) és (8-23.) egyenletekben definiált Q_ϕ és R_ϕ jósági indexek is függenek e változóktól, és így az optimális megoldás általában szintén ezek függvénye lesz, tehát gyakorlatilag igen nehezen kezelhető. Ezen túlmenően értelmezési problémák is felmerülnek, egyrészt a \underline{P}_q korrelációs mátrix vonatkozásában, másrészt az R_ϕ jósági index kapcsán: miután az MV és LN jósági indexek optimauma most eltérő, az R_ϕ index értelmezése önmagában kérdéses, különösen mivel az a méretlen változók $\hat{\underline{q}}(t)$ becslésének négyzetes minimalizálását is előírja.

A nehézségek csökkenthetők olyan jósági indexek bevezetésével, amelyek csak a mért változókra terjednek ki:

$$Q_K = E \{ [\hat{\underline{r}}(t) - \underline{r}(t)]^T \underline{P}_K^{-1} [\hat{\underline{r}}(t) - \underline{r}(t)] \} = E \{ [\underline{k}(t) - \hat{\underline{k}}(t)]^T \underline{P}_K^{-1} [\underline{k}(t) - \hat{\underline{k}}(t)] \} \quad (8-28.)$$

$$R_K = E \{ [\hat{\underline{r}}(t) - \underline{r}(t)]^T \underline{P}_K^{-1} [\hat{\underline{r}}(t) - \underline{r}(t)] \} = E \{ \hat{\underline{k}}^T(t) \underline{P}_K^{-1} \hat{\underline{k}}(t) \} \quad (8-29.)$$

Természetesen ezek a jósági indexek is függenek - az egyenlet-hibán keresztül - a determinisztikus méretlen változóktól, de könnyebben kezelhetők, mint a Q_ϕ és R_ϕ indexek. Az MV és LN indexek különbsége - amint látni fogjuk - most sem állandó, így optimumuk is általában eltér. Viszont most az egyszerűbb R_K index önmagában is értelmezhető: úgy keressük a méretlen és mért változók becslését (az egyenlőség-korlát kielégítése mellett), hogy a mért változók korrekcióját minimalizáljuk (sulyozott négyzetes értelemben). A következőkben az R_K jósági index közelítő (szuboptimális) minimalizálásával olyan algoritmust fogunk levezetni a szóbanforgó becslési feladat megoldására, amely viszonylag egyszerűen alkalmazható, és amelyben sem a szűrő-mátrix, sem pedig a becslési hiba nem függ a méretlen változóktól. Előbb azon-

ban megvizsgáljuk a Q_K és R_K indexek közti összefüggést.

A két jósági index összefüggésének vizsgálatában a 4.2. alfejezet gondolatmenetét fogjuk követni. Induljunk ki a (8-28.) formulából és fejtsük ki a Q_K indexet:

$$Q_K = E \{ \hat{\underline{k}}^T(t) \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \hat{\underline{k}}(t) \} - 2E \{ \underline{k}^T(t) \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \hat{\underline{k}}(t) \} + E \{ \underline{k}^T(t) \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \underline{k}(t) \} \quad (8-30.)$$

Itt az első tag (8-29.) szerint R_K , a harmadik tag pedig a 6.Függelék (F6-3.) képlete alapján $k+m-l$ (a mért változók száma). A második tag a (8-8.) és (8-10.) összefüggések szerint - figyelembe véve, hogy $\underline{k}(t)$ fehér és független $\underline{r}(t)$ -től -

$$E \{ \underline{k}^T(t) \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \hat{\underline{k}}(t) \} = E \{ \underline{k}^T(t) \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \underline{A}_r \underline{M}_O \underline{k}(t) \} \quad (8-31.)$$

Ez a 6.Függelék (F6-2.) és (F6-4.) eredménye szerint

$$E \{ \underline{k}^T(t) \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \underline{A}_r \underline{M}_O \underline{k}(t) \} = \text{tr}(\underline{M}_O \underline{A}_r) \quad (8-32.)$$

Igy a Q_K index

$$Q_K = R_K + (m+k-l) - 2 \text{tr}(\underline{M}_O \underline{A}_r) \quad (8-33.)$$

A (8-20.) egyenlőség-korlátból látható, hogy $\underline{M}_O \underline{A}_r \neq \underline{I}$, tehát (8-33.) tovább nem egyszerűsíthető; a Q_K és R_K indexek különbsége függ az \underline{A}_r mátrixtól, így az azokat optimalizáló szűrő-mátrixok általában különbözőek.

Most levezetjük az R_K jósági indexre vonatkozó, a (8-21.) egyenlőség-korlátot is kielégítő szuboptimális megoldást [B4, B5, B8]. Irjuk fel az R_K indexet a (8-29.) definíció alapján és vegyük figyelembe a (8-8.) összefüggést is:

$$R_K = E \{ \hat{\underline{k}}^T(t) \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \hat{\underline{k}}(t) \} = E \{ \underline{u}^T(t) \underline{A}_r^T \underline{P}_{\underline{K}}^{-1} \underline{A}_r \underline{u}(t) \} \quad (8-34.)$$

Mint hogy a jósági index csak a $\hat{\underline{k}}$ vektorra, az egyenlőség-korlát viszont a teljes $\hat{\underline{\phi}} = [-\hat{\underline{q}}^T \hat{\underline{k}}^T]^T$ vektorra terjed ki, a korlátot előbb át kell alakítanunk. Ebben a méretlen változókat is tartalmazó statikus anyagmérleg-számítások eljárását fogjuk követni. A korlát \underline{m} számú egyenletéből $\underline{\ell}$ számot arra fogunk felhasználni, hogy a méretlen változók $\hat{\underline{q}}$ becslését kifejezzük a mért változók $\hat{\underline{k}}$ korrekciójával. Az eredményt aztán a maradék $m-l$ számú egyenletbe helyettesítve megkapjuk a pusztán a $\hat{\underline{k}}$ korrekciókra vonatkozó korlátot, amely így már kompatibilis a

jósági indexszel. Láthatóan ez az eljárás csak akkor alkalmazható, ha $\ell \leq m$ (az $\ell = m$ határesetben $\hat{\underline{k}} = 0$; a levezetésből ezt kizárjuk).

Induljunk ki az egyenlőség-korlát (8-19.) alakjából kis formai módosítással:

$$\underline{L}_O \hat{\underline{q}}(t) - \underline{M}_O \hat{\underline{k}}(t) + \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (8-35.)$$

Vezessük be az alábbi transzformációs mátrixokat:

$$\underline{I}_E = [\underline{I} \quad \underline{0}] \quad \underline{I}_H = [\underline{0} \quad \underline{I}] \quad (8-36.)$$

ahol \underline{I}_E $\ell \times m$ méretű, \underline{I}_H pedig $(m-\ell) \times m$ méretű és $\ell < m$. E mátrixok segítségével a (8-35.) egyenlet első ℓ sora az alábbi módon írható fel:

$$\underline{I}_E [\underline{L}_O \hat{\underline{q}}(t) - \underline{M}_O \hat{\underline{k}}(t) + \underline{u}(t)] = \underline{0} \quad (8-37.)$$

a maradék $m-\ell$ sor pedig

$$\underline{I}_H [\underline{L}_O \hat{\underline{q}}(t) - \underline{M}_O \hat{\underline{k}}(t) + \underline{u}(t)] = \underline{0} \quad (8-38.)$$

Oldjuk meg a (8-37.) egyenletet $\hat{\underline{q}}(t)$ -re:

$$\hat{\underline{q}}(t) = \underline{L}_E [\underline{M}_O \hat{\underline{k}}(t) - \underline{u}(t)] = \underline{L}_E (\underline{\bar{M}}_O \underline{A}_r - \underline{I}) \underline{u}(t) \quad (8-39.)$$

ahol

$$\underline{L}_E = (\underline{I}_E \underline{L}_O)^{-1} \underline{I}_E \quad (8-40.)$$

Láthatóan a méretlen változók becslése ezzel a gondolatmenettel is az egyenlet-hiba lineáris függvényeként adódik, amint azt a 8.2. alfejezetben előre jeleztük. Helyettesítsük most be a (8-39.) eredményt a (8-38.) egyenletbe; némi átrendezés után a $\hat{\underline{k}}$ vektorra vonatkozó egyenlőség-korlát így

$$\underline{N} [\underline{M}_O \hat{\underline{k}}(t) - \underline{u}(t)] = \underline{N} [\underline{M}_O \underline{A}_r - \underline{I}] \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (8-41.)$$

vagyis

$$\underline{N} [\underline{M}_O \underline{A}_r - \underline{I}] = \underline{0} \quad (8-42.)$$

ahol

$$\underline{N} = \underline{I}_H (\underline{L}_O \underline{L}_E - \underline{I}) \quad (8-43.)$$

Feladatunk tehát a (8-34.) jósági index minimalizálása a (8-42.) egyenlőség-korlát egyidejű kielégítése mellett, azzal

a közelítő (szuboptimális) feltevással, hogy az egyenlet-hiba nem függ a szűrő-mátrix megválasztásától. E feladat a 9. Függelék levezetését követve megoldható és az eredmény

$$\underline{A}_{Sr} = \underline{P}_K \underline{M}_O^T \underline{N}^T [\underline{N} \underline{M}_O \underline{P}_K \underline{M}_O^T \underline{N}^T]^{-1} \underline{N} \quad (8-44.)$$

Írjuk még ide a (8-39.) összefüggésnek megfelelő formulát is:

$$\underline{A}_{Sq} = \underline{L}_E (\underline{I} - \underline{M}_O \underline{A}_{Sr}) \quad (8-45.)$$

A szuboptimális megoldás létezésének feltétele, hogy az $\underline{L}_E \underline{L}_O$ és az $\underline{N} \underline{M}_O \underline{P}_K \underline{M}_O^T \underline{N}^T$ mátrix-szorzatok invertálhatók legyenek; ez általában teljesül, mivel a szorzatok rangját a tényezők strukturálisan nem korlátozzák.

Végül megmutatjuk, hogy a (8-44.) és (8-45.) szűrő alkalmazása esetén a becslési hiba független lesz a méretlen változóktól, ami egyben a becslés torzítatlanságát is jelenti. Induljunk ki a becslési hiba (8-17.) egyenletéből és fejtsük azt ki a (8-2.) és (8-13.) definíciók szerint:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(t) &= [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_O) \underline{\phi}(t) = \\ &= [\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} \begin{bmatrix} \underline{I} - \underline{A} \underline{L}_O & -\underline{A} \underline{M}_O \\ -\underline{A} \underline{r}_O & \underline{I} - \underline{A} \underline{M}_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{q}(t) \\ \underline{\kappa}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8-46.)$$

Könnyen belátható, hogy $\underline{L}_E \underline{L}_O = \underline{I}$ és $\underline{N} \underline{L}_O = \underline{O}$, így $\underline{A}_{Sq} \underline{L}_O = \underline{I}$ és $\underline{A}_{Sr} \underline{L}_O = \underline{O}$, vagyis a becslési hiba az \underline{A}_S szuboptimális megoldás mellett

$$\underline{\psi}(t) = [\underline{I} + \underline{A}_S \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]^{-1} \begin{bmatrix} \underline{O} & -\underline{A}_{Sq} \underline{M}_O \\ \underline{O} & \underline{I} - \underline{A}_{Sr} \underline{M}_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{q}(t) \\ \underline{\kappa}(t) \end{bmatrix} \quad (8-47.)$$

A $\underline{\psi}(t)$ becslési hiba tehát valóban nem függ a $\underline{q}(t)$ méretlen változóktól, csak a mért változók $\underline{\kappa}(t)$ mérési zajától. Mivel pedig ez utóbbi zérus várható értékű, a becslés torzítatlan is.

9. SZÁMITÁSI EREDMÉNYEK

9.1. Bevezetés

A dolgozat elméleti megállapításainak ellenőrzése és alátámasztása céljából kiterjedt számítógépes vizsgálatokat végeztünk. Ezek lényegesebb eredményeit mutatjuk be ebben a fejezetben.

A számítógépes vizsgálatok módszerül két utat választottunk: egyrészt a numerikus megközelítést, másrészt a szimulációt. Számos esetben a vizsgálatokat mindkét módon elvégeztük, így az eredmények egymás ellenőrzésére is felhasználhatók voltak.

A vizsgálatok az alábbi problémakörökre terjedtek ki:

- alapszámítások (a triviális, szuboptimális és optimális szűrő)
- stabilitás
- érzékenység
- rendszer-zaj kezelése.

A vizsgálatokhoz egyrészt mesterséges mintarendszereket, másrészt valóságos fizikai folyamatok modelljét használtuk fel. A mintarendszerek között első- és másodrendű egy-bemenet egy-kimenetű rendszereket tekintettünk, valamint harmadrendű rendszereket egy és két be- és kimenet minden kombinációjában. A vizsgált fizikai folyamatok egy villamos motor-generátor egység, egy desztillációs oszlop és egy ammónia-reaktor voltak, mindhárom két be- és két kimenettel, rendre harmad-, negyed- és hatodrendű modellel.

Az eredményeket részben diagramok, részben táblázatok formájában fogjuk bemutatni. Bár a grafikus ábrázolás általában jobban áttekinthető, több esetben mégis kénytelenek leszünk táblázatokat alkalmazni, mert a szemléltetni kívánt hatás relative olyan kicsi, hogy csak numerikus formában lehet érzékelni.

Az analitikus-numerikus elemzést Varga Gyula kollégám végezte Abaffy József közreműködésével, a szimulációs vizsgálatokat pedig Sipos Ferenc. A felhasznált fizikai rendszerek model-

lezése részben Braun Péter barátom korábbi munkája volt, részben pedig Raghuvarsh Prasad Singh Cleveland-i diákomtól illetve Pavel Simko aspiránsomtól származott.

9.2. Numerikus program

A numerikus program a 4.3. és 4.4. alfejezetekben leírt algoritmus gépi megvalósítása. Az algoritmus illetve program célja a megfigyelt rendszer \underline{K}_i mátrixai és a zaj \underline{P}_ξ kovariancia-mátrixa alapján a szuboptimális és triviális szűrő-mátrixok kiszámítása a hozzájuk tartozó jósági index értékekkel együtt, továbbá a szuboptimális megoldásból (ha ez instabil, a triviális megoldásból) kiindulva az optimális szűrő meghatározása.

A szóbanforgó algoritmus gépi realizációja nem triviális feladat: több olyan problémát vet fel, amelyek speciális numerikus matematikai megfontolásokat illetve algoritmusokat igényelnek. A főbb problémák az alábbiak:

- a/ Az η_i és $\underline{\Gamma}'_i$ mennyiségek meghatározása. A (4-15.) összefüggésből indulunk ki:

$$\frac{\sum_{i=0}^{nm} \underline{\Gamma}'_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{nm} \eta_i z^{-i}} = \underline{A} \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \quad (9-1.)$$

Az átalakítás elvileg algebrai uton is lehetséges volna, ennek gépesítése azonban rendkívül bonyolult. Ezért numerikus interpolációt alkalmazunk, amelynek lényege, hogy a z változónak különböző numerikus értékeket adva lineáris egyenletrendszereket állítunk elő az ismeretlen mátrixokra és skalárookra nézve. Az algoritmus vázlatos leírását a 11. Függelék tartalmazza.

- b/ Stabilitás-vizsgálat. Ezt a

$$H(z^{-1}) = 1 + \eta_1 z^{-1} + \dots + \eta_{nm} z^{-nm} \quad (9-2.)$$

karakterisztikus polinom gyökeinek meghatározása útján vé-

gezzük. A gyökök kiszámítására a Bairstow-módszert [A4,A5] alkalmazzuk. Ez többszörös gyökök kezelésére nem alkalmas, esetünkben viszont ilyenekkel számolni kell (a triviális megoldás helyén egzakt többszörös gyökök, annak környezében közelálló gyökök lépnek fel), ezért szükségessé vált az eljárás kiterjesztése [C11]. A módszer vázlatos leírását a 12. Függelék tartalmazza.

c/ Optimum-keresés. Itt a Powell-módszert [C2,C6] alkalmazzuk, ezen belül vonalmenti minimalizálásra a parabola eljárást, ez utóbbit a stabilitás-vizsgálat beiktatásával módosított formában. E módszer vázlatos leírását a 13. Függelék tartalmazza.

A fenti megfontolásokon túlmenően pontossági problémák fel lépésével is számolni kell. Ha ugyanis a mintavételi intervallum kicsi a megfigyelt folyamat időállandóihoz képest, akkor a folyamat karakterisztikus polinomjának az egységhez közeli abszolút értékű gyöke van. Ilyenkor a szűrő is közel van a stabilitás határához és a jósági index függvény igen meredek. Ez a helyzet várhatóan - és a tapasztalat is ezt mutatja - numerikus nehézségekre vezet: a szűrő valójában stabil, de a határhoz igen közel eső pólus instabilnak mutatkozik illetve az $\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F$ mátrix rosszul kondicionált az inverzió szempontjából. Látszólagos instabilitás esetén még lehetséges lehet a numerikus megoldás - a szuboptimális pont helyett a triviálisból kiindulva, ha az előbbi látszólag instabil, illetve az instabilnak mutató tartományok elkerülésével az optimum-keresés során (ezeket egyébként a program automatikusan megteszi). Az $\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F$ mátrix rosszul kondicionáltsága viszont gyakorlatilag kizárja a numerikus megoldást. Ezért ilyenkor (ha $\Delta t/T \leq 0,1$) a program kritikus szakaszaiban - az η_i és Γ_i értékek számításában valamint a stabilitás-vizsgálatban - kettős pontosságú műveleteket használunk. Egyes esetekben azonban még ez sem elegendő; ekkor a feladat numerikus megoldása - legalábbis az algoritmus további pontosság-javító megoldásokkal való kiegészítése nélkül - nem lehetséges.

A program CDC 3300-as számítógépre készült FORTRAN nyelven. Futási időszükséglete a k , m és n paramétereken túl is nagy mértékben függ a megfigyelt folyamattól, mivel az optimum-keresés elemi lépéseinek száma tág határok között változhat. $k=m=2$, $n=3$ mellett egyszeres pontossággal $50 \div 300$ elemi lépéshez $2 \div 8$ perces gépidő, kétszeres pontossággal pedig $50 \div 100$ elemi lépéshez $12 \div 20$ perces gépidő tartozott. $k=m=2$, $n=6$ mellett $50 \div 300$ számú elemi lépésre egyszeres pontossággal $6 \div 25$ perc volt szükséges.

Az algoritmus fentiekben vázolt numerikus-gépi realizációját Varga Gyula készítette Abaffy József közreműködésével.

9.3. Szimulációs program [C7]

A szimulációs program a folyamat és a mérési zaj adott paraméterei mellett szimulációval határozza meg a szuboptimális és triviális szűrőkhöz tartozó jósági index értékeket.

A szimulációs program főbb részei a következők:

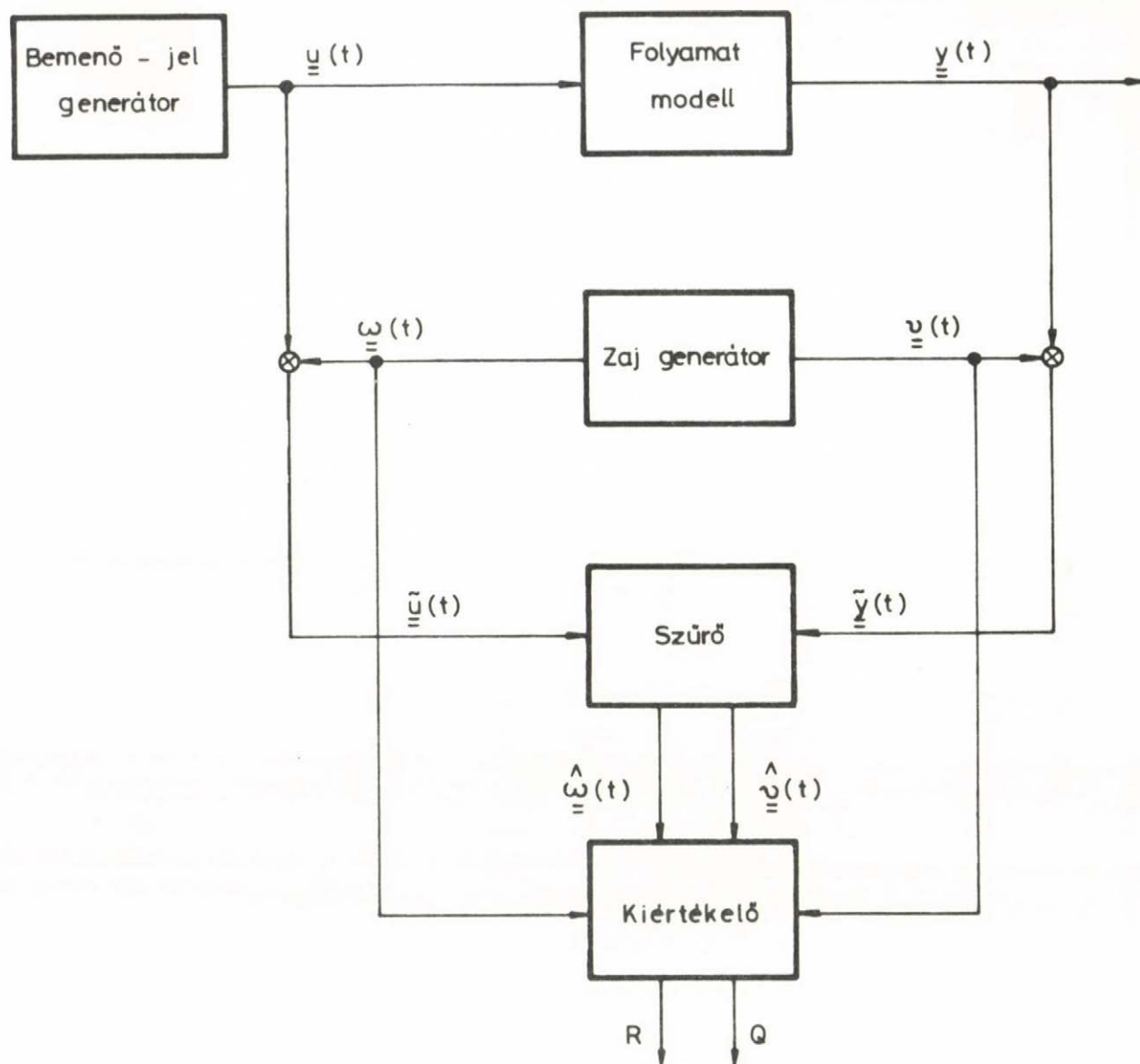
- folyamat-modell
- bemenő-jel generátor
- zaj-generátor
- szűrő-algoritmus
- jósági index kiértékelő.

A program tömbvázlatát a 9.1.ábra mutatja. Realizációja a CDC 3300-as számítógépre készült SIMULA nyelven.

A szimulációs program kritikus eleme a bemenő-jelek, főként pedig a zajok előállítása. Mindkét esetben a könyvtári véletlen-szám generátor jeleiből indultunk ki, amelyek elvileg normális eloszlásuak zérus várható értékkel és egységnyi szórással, továbbá időben korrelálatlanok.

Bemenő-jelek számára időben korrelált véletlen jeleket állítottunk elő, mivel ez felel meg leginkább a reális szituációnak. E célból a véletlen-szám generátor korrelálatlan jel-sorozatát

$$W(z) = \frac{0,435}{1 - 0,9 z^{-1}} \quad (9-3.)$$



9-1. ábra

átviteli függvényü szűrőn (több bemenő-jel esetén külön-külön szűrőkön) vezettük keresztül. A választott paraméterek biztosítják, hogy a szűrő kimenő-jelének varianciája megegyezik bemenő-jelének varianciájával.

A mérési zajok esetében lényeges, hogy azok valóban zérus várható értékűek és időben korrelálatlanok legyenek, valamint hogy zérus eltoláshoz tartozó kovariancia-mátrixuk az előirt legyen. Ezeknek a követelményeknek a véletlen-szám generátor kimenő-jele nem teljes mértékben tesz eleget. Várható értékre és zérus eltoláshoz tartozó kovarianciára a jelek könnyen korrigálhatók. A várható érték korrekciója

$$\xi''(t) = \xi'''(t) - \xi'''_e \quad (9-4.)$$

formában történik, ahol ξ'''_e az eredeti $\xi'''(t)$ jelsorozat várható értéke. Másrészt ha $\underline{P}_{\xi''}$ a $\xi''(t)$ skalár-sorozatból kiválasztott $\underline{\xi}''(t)$ vektor-sorozat korrelációs mátrixa, akkor a

$$\underline{\xi}'(t) = \underline{P}_{\xi''}^{-1/2} \underline{\xi}''(t) \quad (9-5.)$$

transzformációval egységnyi korrelációju vektor-sorozat, ebből pedig

$$\underline{\xi}(t) = \underline{P}_{\xi}^{1/2} \underline{\xi}'(t) \quad (9-6.)$$

transzformációval \underline{P}_{ξ} korrelációju vektor-sorozat állítható elő. A zajok időbeli korreláltsága ilyen egyszerű módon nem befolyásolható; itt a véletlen-szám generátor paramétereivel kell kísérletezni egy elfogadható sorozat előállítása érdekében. A $k=m=1$ paraméterű vizsgálatokban alkalmazott zajvektor-sorozat auto- és keresztkorrelációs értékeit néhány eltolásra a 9.1. Táblázat mutatja.

Egy-egy szimulációs vizsgálat 1000 lépést tartalmaz. A jósági indexek számításában természetesen a várható érték képzést átlagolással közelítjük.

A szimulációs programot Sipos Ferenc készítette.

Eltolás	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}
0	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000
1	0.01691	0.05897	-0.01553	-0.01800
2	-0.04068	-0.00539	0.01337	-0.00319
3	-0.05571	-0.04126	0.01642	0.04752
4	0.04912	-0.00351	0.00479	-0.01753
5	0.00369	-0.04116	0.02051	0.00057
6	-0.01442	-0.03605	0.05203	0.00519
7	-0.03325	0.01446	-0.07825	-0.01840
8	-0.00572	-0.02851	0.04645	-0.01264
9	-0.00039	0.03531	0.02684	-0.04681
10	0.01591	-0.04664	0.01099	-0.01794

9-1. Táblázat

9.4. Alapvizsgálatok mintarendszereken

Az alapvizsgálatok célja

- az optimális, szuboptimális és triviális szűrők összehasonlítása,
- a szűrők jósági indexének vizsgálata alapvető rendszerparaméterek (mintavételi időköz, statikus erősítés) függvényében.

Emellett a vizsgálatok lehetővé teszik

- a \underline{Q} és \underline{R} jósági indexek (szimulált) értékeinek összehasonlítását,
- a szimulációval illetve analitikusan kapott jósági index értékek összehasonlítását.

Az alapvizsgálatokat első- és harmadrendű mintarendszereken folytattuk.

E mintarendszerek kapcsán a mérési zajok zérus eltoláshoz tartozó kovarianciáira nézve semmiféle feltevéssel nem tudtunk élni, ezért a legegyszerűbb $\underline{P}_\xi = \underline{I}$ kovariancia-mátrixszal számolunk. Mivel azonban - ahogy a 4. Fejezetben megmutattuk - mind a jósági index, mind pedig az optimális és szuboptimális szűrő-mátrix invariáns \underline{P}_ξ nyújtására, ez a tágabb $\underline{P}_\xi = d^2 \underline{I}$ esetet is magába foglalja (ahol d tetszőleges szám).

9.4.1. Elsőrendű mintarendszer

A vizsgálat tárgya a

$$W(s) = \frac{c}{1 + sT} \quad (9-7.)$$

folytonos rendszer diszkrét realizációja volt. Ez a bemenő-jel téglalap-közelítése esetén

$$W(z) = \frac{g_0}{1 + h_1 z^{-1}} \quad (9-8.)$$

ahol

$$g_0 = c(1 - e^{-\Delta t/T}) \quad \text{és} \quad h_1 = -e^{-\Delta t/T} \quad (9-9.)$$

trapéz-közelítés esetén pedig

$$W(z) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 + h_1 z^{-1}} \quad (9-10.)$$

ahol

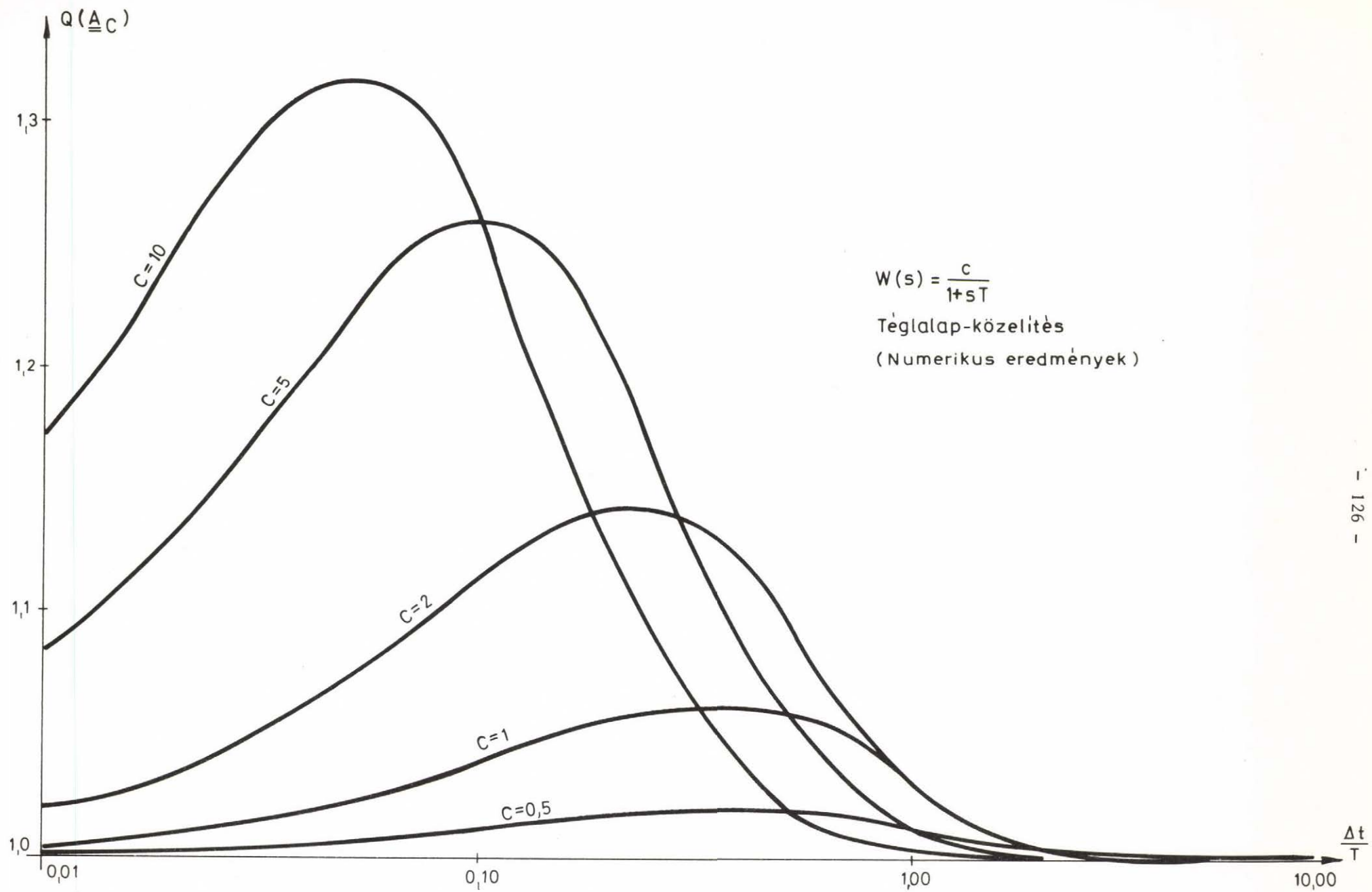
$$g_0 = c \left[1 - \frac{T}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t/T}) \right]; \quad g_1 = c \left[\frac{T}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t/T}) - e^{-\Delta t/T} \right]; \quad h_1 = -e^{-\Delta t/T} \quad (9-11.)$$

Vizsgálataink során a $\Delta t/T$ hányadost a $[0,01; 10]$ intervallumban, a c erősítési tényezőt pedig a $[0,1; 10]$ intervallumban variáltuk. Mindvégig $P_{\xi} = I$ volt.

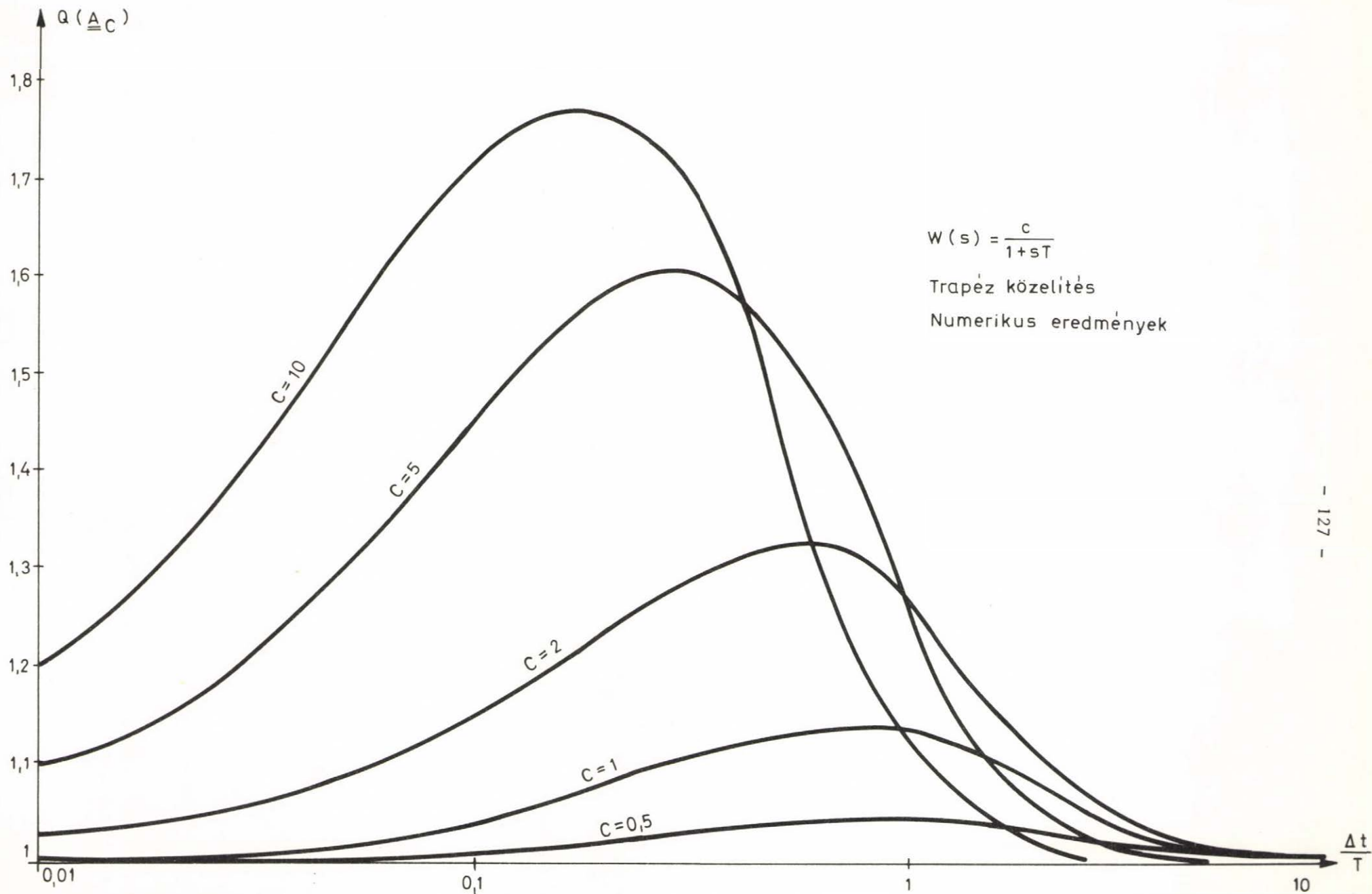
A 9-2. ábra téglalap-közelítésre, a 9-3. ábra trapéz-közelítésre vonatkozóan mutatja az optimumhoz tartozó $Q=R$ jósági indexet $\Delta t/T$ függvényében c -vel paraméterezve (analitikus-numerikus számítások alapján). Láthatóan a görbék - összhangban a 4.9. alfejezetben mondottakkal - mindkét végükön $m=k=1$ -hez tartanak és a közbenső értékek sem különböznek lényegesen az egységtől.

A 9.2. Táblázat (analitikus-numerikus számítások alapján) $c=1$ és $c=10$ mellett $\Delta t/T$ függvényében együtt mutatja az optimális, szuboptimális és triviális jósági index értékeket. Láthatóan a $Q(\underline{A}_S)$ szuboptimális függvényértékek viszonylag kevésbé különböznek a $Q(\underline{A}_C)$ optimumoktól. Az is megfigyelhető, hogy Δt növelésével - a 4.9. alfejezet eredményeinek megfelelően - a $Q(\underline{A}_T)$ triviális függvény-értékek lényegesen nőnek, a $Q(\underline{A}_C)$ értékek viszont nem, vagyis az optimális szűrő hatékonysága a triviális szűréshez képest javul. Ez különösen szembeötlő, ha c értéke nagy, mivel $Q(\underline{A}_T)$ határértéke $\Delta t \rightarrow \infty$ mellett c^2 -tel arányos. A triviális és optimális függvény-értékeket a $c=1$ esetre, a $0,1 \leq \frac{\Delta t}{T} \leq 5$ tartományban, a 9.4. ábrán is bemutatjuk.

Végül a 9.3. Táblázat (szintén $c=1$ és $c=10$ mellett, $\Delta t/T$ függvényében) a szuboptimális szűrésre analitikusan nyert $Q(\underline{A}_S) = R(\underline{A}_S)$ értékeket a szimulációval nyert $Q(\underline{A}_S)$ és $R(\underline{A}_S)$ értékekhez hasonlítja. Láthatóan az egyezés meglehetősen jó; az eltérések a szimulációhoz használt mérési zaj időbeli korrelált-ságából adódnak. Az is megfigyelhető, hogy az R index szimulációja lényegesen pontatlanabb mint a Q indexé; ennek okára a 9.6.4. alfejezetben még visszatérünk.



9-2. ábra.



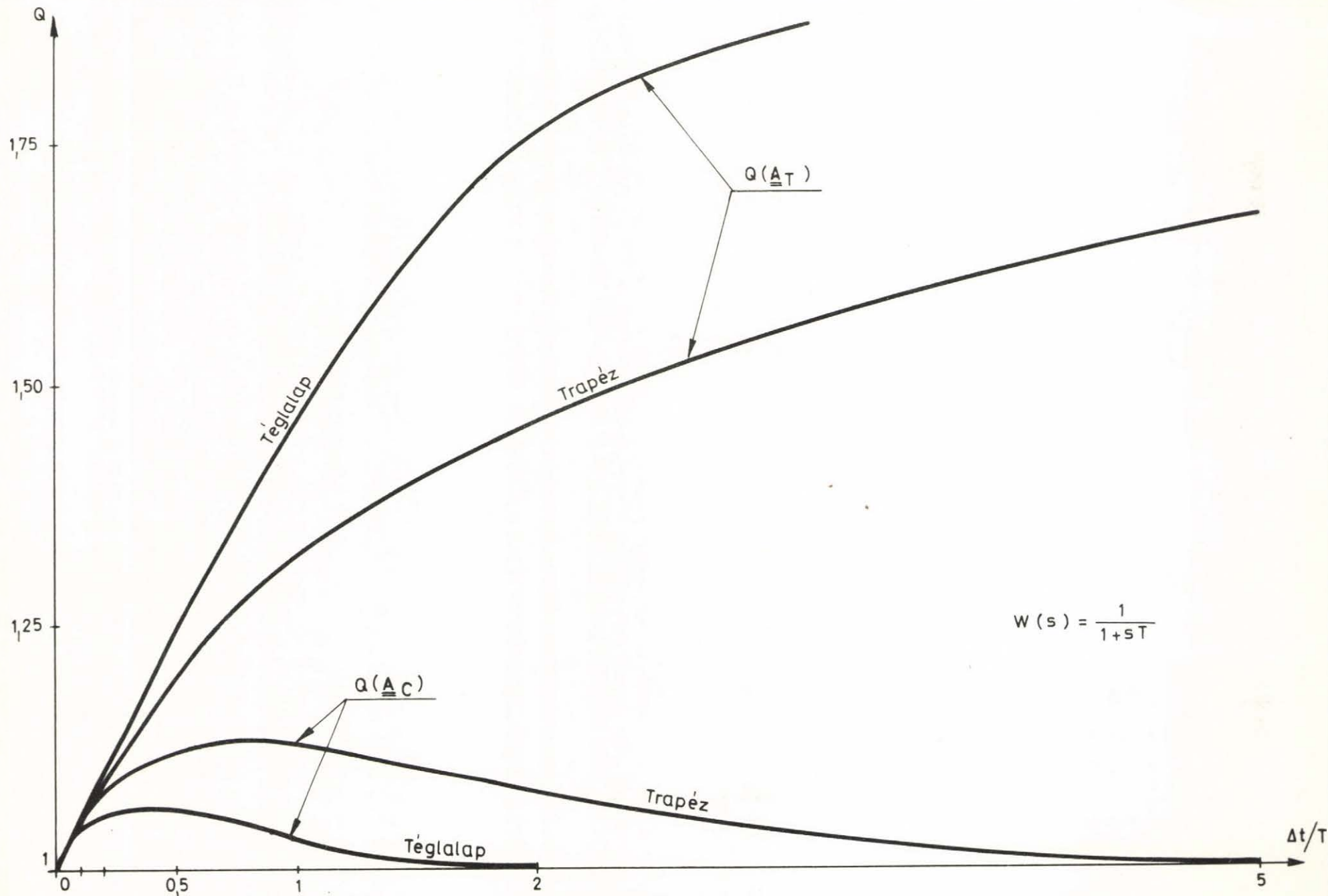
9-3. ábra.

c	$\Delta t/T$	Téglalap-közelítés			Trapéz-közelítés		
		$Q(\underline{A}_T)$	$Q(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_C)$	$Q(\underline{A}_T)$	$Q(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_C)$
1	0,01	1,00500	1,00485	1,00485	1,00498	1,00493	1,00492
	0,02	1,01000	1,00942	1,00940	1,00990	1,00971	1,00968
	0,05	1,02499	1,02154	1,02145	1,02439	1,02321	1,02310
	0,10	1,04996	1,03717	1,03698	1,04758	1,04315	1,04284
	0,20	1,09967	1,05555	1,05530	1,09064	1,07484	1,07420
	0,50	1,24492	1,05898	1,05891	1,19707	1,12449	1,12386
	1,00	1,46212	1,02966	1,02965	1,31999	1,13133	1,13122
	2,00	1,76159	1,00451	1,00451	1,46460	1,07998	1,07998
	5,00	1,98661	1,00001	1,00001	1,68109	1,01455	1,01455
	10,00	1,99991	1,00000	1,00000	1,82001	1,00306	1,00306
10	0,01	1,50000	1,24444	1,17002	1,49751	1,33038	1,19424
	0,02	1,99997	1,31613	1,24687	1,99007	1,49171	1,31203
	0,05	3,49948	1,34301	1,31748	3,43853	1,68718	1,53956
	0,10	5,99584	1,26362	1,26041	5,75820	1,77192	1,71869
	0,20	10,96680	1,12445	1,12439	10,06446	1,76606	1,76606
	0,50	25,49187	1,02099	1,02099	20,70665	1,47448	1,45222
	1,00	47,21172	1,00322	1,00322	32,99864	1,12902	1,12787
	2,00	77,15942	1,00024	1,00024	47,45971	1,01696	1,01695
	5,00	99,66142	1,00000	1,00000	69,10925	1,00097	1,00097
	10,00	100,99092	1,00000	1,00000	83,00064	1,00015	1,00015

$$W(s) = \frac{c}{1 + sT}$$

Numerikus eredmények

9-2. Táblázat



9-4. ábra.

c	$\Delta t/T$	Téglalap-közelítés			Trapéz-közelítés		
		Egzakt	Szimulált		Egzakt	Szimulált	
		$Q(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_S)$	$R(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_S)$	$R(\underline{A}_S)$
1	0,01	1,00485	1,0052	1,0051	1,00493	1,0053	1,0052
	0,02	1,00942	1,0096	1,0088	1,00971	1,0100	1,0090
	0,05	1,02154	1,0212	1,0169	1,02321	1,0229	1,0184
	0,10	1,03717	1,0354	1,0287	1,04315	1,0411	1,0340
	0,20	1,05555	1,0531	1,0464	1,07484	1,0712	1,0636
	0,50	1,05898	1,0590	1,0616	1,12449	1,1237	1,1251
	1,00	1,02966	1,0299	1,0406	1,13133	1,1323	1,1494
	2,00	1,00451	1,0045	1,0110	1,07998	1,0798	1,1035
	5,00	1,00001	1,0000	1,0004	1,01455	1,0145	1,0268
	10,00	1,00000	1,0000	1,0000	1,00306	1,0030	1,0089
10	0,01	1,24444	1,2431	1,2409	1,33038	1,3393	1,3380
	0,02	1,31613	1,3048	1,2892	1,49171	1,4837	1,4688
	0,05	1,34301	1,3335	1,3165	1,68718	1,6538	1,6253
	0,10	1,26362	1,2660	1,2867	1,77192	1,7730	1,7809
	0,20	1,12445	1,1248	1,1631	1,76606	1,7657	1,8581
	0,50	1,02099	1,0210	1,0391	1,47448	1,4668	1,5191
	1,00	1,00322	1,0032	1,0102	1,12902	1,1270	1,1523
	2,00	1,00024	1,0002	1,0021	1,01696	1,0169	1,0287
	5,00	1,00000	1,0000	1,0001	1,00097	1,0010	1,0047
	10,00	1,00000	1,0000	1,0000	1,00015	1,0002	1,0016

$$W(s) = \frac{c}{1 + sT}$$

9-3. Táblázat

9.4.2. Harmadrendű mintarendszerek

A

$$W(s) = \frac{c}{(1 + 0,8s)(1 + s)(1 + 2s)} \quad (9-11.)$$

folytonos rendszerből indulunk ki, és - a 9.5.ábrán bemutatott módon - négy különböző rendszert alakítunk ki belőle:

- az a, változatban $k=1, m=1$
- a b, változatban $k=1, m=2$
- a c, változatban $k=2, m=1$
- a d, változatban $k=2, m=2$.

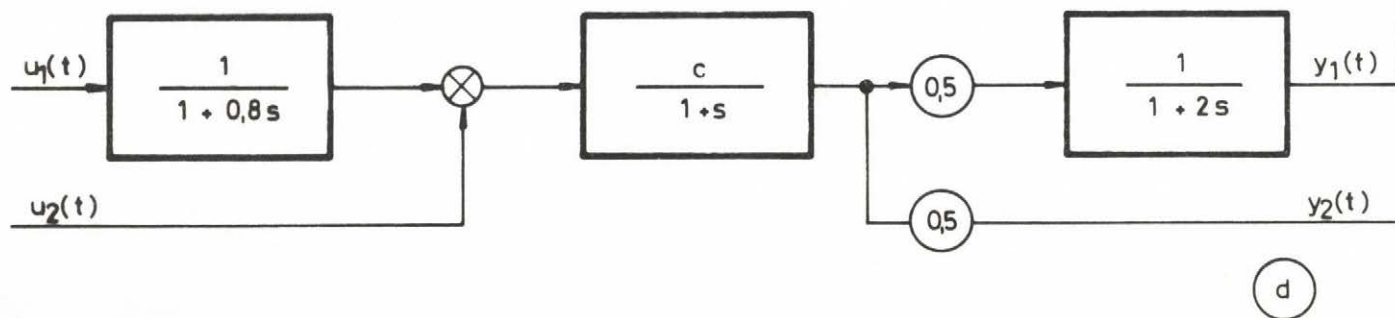
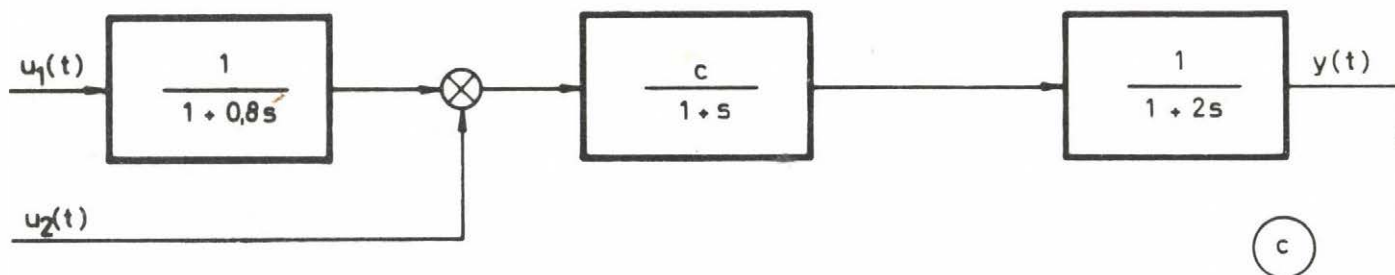
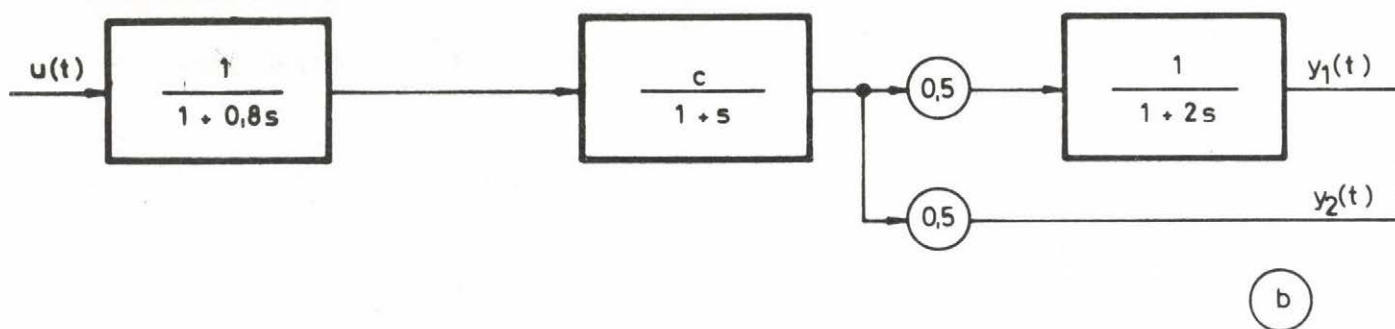
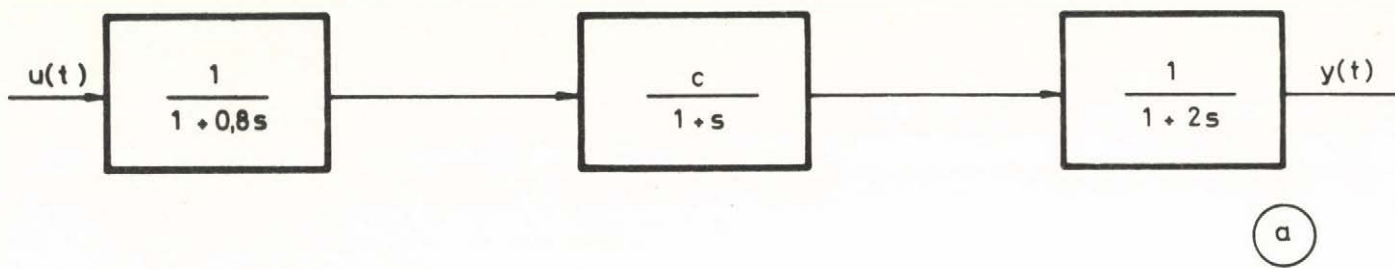
Mind a négy változatot vizsgáljuk téglalap- és trapéz-közelítéssel, a $\Delta t=0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10$ sec értékekre. Az a, b, és c, változatban $c=1$, a d, változatban $c=1$ és $c=10$. A zaj korrelációs mátrixa végig $P_{\xi} = I$.

A 9.4.táblázat az a, b, és c, változatokra vonatkozólag mutatja $Q(\underline{A}_T)$, $R(\underline{A}_T)$, $Q(\underline{A}_S)$ és $R(\underline{A}_S)$ értékeit szimulációs eredmények alapján. A táblázatban jól megfigyelhető a $Q-R=k-m$ összefüggés. (A pontatlanságok a szimulált zaj időbeli korreláltságából fakadnak.)

A 9.5.táblázat a d, változat triviális, szuboptimális és optimális Q jósági indexeit tartalmazza numerikus és szimulációs eredmények alapján (ez utóbbiak zárójelben). Láthatóan a szuboptimális megoldás alig rosszabb az optimálisnál. Az is megfigyelhető, hogy a Q index szimulált értékei igen jól egyeznek a numerikus értékekkel. $\Delta t=0,1s$ esetén a feladat numerikusan kritikussá vált: a számítás pontossága dupla pontosságú műveletek alkalmazásával sem volt elégséges (az $\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F$ mátrix rosszul kondicionált).

*

A bemutatott eredmények tanúsága szerint a trapéz-közelítés optimuma rosszabb és a szuboptimális megoldás jobban eltér az optimálistól mint téglalap-közelítés esetében. Ennek oka abban keresendő, hogy ha - egyébként azonos körülmények mellett - növeljük a diszkrét rendszer átviteli függvénye számlálójának fok-



	Δt	Téglalap-közelítés				Trapéz-közelítés			
		$Q(\underline{A}_T)$	$R(\underline{A}_T)$	$Q(\underline{A}_S)$	$R(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_T)$	$R(\underline{A}_T)$	$Q(\underline{A}_S)$	$R(\underline{A}_S)$
k=1 m=1	0,1	1,0139	1,0120	1,0139	1,0120	1,0139	1,0121	1,0139	1,0121
	0,5	1,0653	1,0496	1,0648	1,0491	1,0649	1,0490	1,0648	1,0489
	1,0	1,1341	1,1199	1,1268	1,1123	1,1318	1,1136	1,1304	1,1121
	2,0	1,2618	1,2637	1,1748	1,1817	1,2553	1,2512	1,2382	1,2345
	5,0	1,6219	1,6282	1,0202	1,0339	1,4447	1,4597	1,2522	1,2840
k=1 m=2	0,1	1,0075	2,0073	1,0075	2,0072	1,0075	2,0074	1,0075	2,0074
	0,5	1,0367	2,0298	1,0348	2,0262	1,0361	2,0260	1,0361	2,0254
	1,0	1,0807	2,0917	1,0583	2,0639	1,0765	2,0822	1,0737	2,0768
	2,0	1,1747	2,2017	1,0540	2,0704	1,1409	2,1702	1,1150	2,1372
	10,0	1,4881	2,4894	1,0001	2,0003	1,2945	2,3201	1,0285	2,0393
k=2 m=1	0,1	2,0206	1,0304	2,0205	1,0303	2,0205	1,0303	2,0205	1,0303
	0,5	2,1431	1,1409	2,1350	1,1319	2,1420	1,1398	2,1399	1,1373
	1,0	2,2983	1,2980	2,2227	1,2234	2,2926	1,2907	2,2696	1,2685
	2,0	2,5673	1,5786	2,2092	1,2083	2,5322	1,5470	2,4085	1,4202
	10,0	3,9274	2,9279	2,0001	0,9997	3,1075	2,1189	2,0696	1,0678

Szimulációs eredmények

9-4.Táblázat

c	Δt	Téglalap-közelítés			Trapéz-közelítés	
		$Q(\underline{A}_T)$	$Q(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_C)$	$Q(\underline{A}_T)$	$Q(\underline{A}_S)$
1	0,1	(2,0213)	* (2,0189)	*	(2,0206)	(2,0200)
	0,5	2,1342 (2,1282)	2,0779 (2,0753)	2,0775	(2,1153)	(2,0973)
	1,0	2,2565 (2,2513)	2,0935 (2,0927)	2,0932	(2,2095)	(2,1514)
	2,0	2,4613 (2,4572)	2,0691 (2,0693)	2,0691	(2,3409)	(2,1817)
	10	2,9818 (2,9817)	2,0001 (2,0001)	2,0001	(2,6552)	(2,0308)
10	0,1	(4,1256)	* (2,4194)	*	(4,0622)	(2,7923)
	0,5	15,3874 (14,8235)	2,2871 (2,2873)	2,2842	(13,5248)	(3,0073)
	1,0	27,6560 (27,1256)	2,2281 (2,2269)	2,2271	(22,9534)	(2,8887)
	2,0	48,1288 (47,7200)	2,1646 (2,1670)	2,1644	(35,0884)	(2,7386)
	10	100,1780 (100,1694)	2,0006 (2,0006)	2,0006		

k = 2

m = 2

* Elégtelen numerikus pontosság

Numerikus (és szimulációs) eredmények

9-5.Táblázat

számát, akkor a pillanatnyi szűrési korrekció hatása a következő mintavételek egyenlet-hibájára megnő. Ezért egyrészt kevésbé lesz igaz a szuboptimális méretezés alapfeltevése, vagyis romlik a szuboptimális szűrő az optimálishoz képest, másrészt romlik maga az elérhető optimum is. Ebből a szempontból tehát a trapéz-leírás kedvezőtlenebb mint a téglalap-leírás. (A trapéz-közelítésnek ez a foksám-növelő hatása egyébként relative annál kevésbé jelentős, minél nagyobb a rendszer fokszáma.)

A fentiekkel szemben áll az a körülmény, hogy a téglalap-közelítéssel nyert diszkrét átviteli függvény rosszabb leírása az eredeti folytonos rendszernek, mint a trapéz-közelítéssel nyert átviteli függvény. Ez a közelítési hiba (amelyet elméletileg a 6.5.alfejezetben tárgyaltunk) a jelen alapvizsgálatokban nem tükröződik; szimulációs vizsgálatára a 9.6.5.alfejezetben kerül sor.

9.5. Stabilitás vizsgálat

A stabilitás vizsgálatát egy egy-bemenet egy kimenetű másodrendű rendszer példáján mutatjuk be.

Induljunk ki egy folytonos rendszerből, amelynek átviteli függvénye

$$W(s) = \frac{2c}{(1+s)(1+2s)} \quad (9-12.)$$

Az ennek megfelelő diszkrét átviteli függvény a bemenő-jel trapéz közelítése mellett

$$W(z) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}} \quad (9-13.)$$

alku. A \underline{g} és \underline{h} paraméterek a \underline{c} tényezőtől és a Δt mintavételi intervallumtól függenek. $c=1$ és $c=10$ mellett a $\Delta t = [0,01; 10]$ tartományt fogjuk tekinteni.

Vizsgáljuk meg a $\underline{P}_\xi = \underline{I}$ feltételezéssel tervezett szuboptimális szűrő stabilitását. A szűrő-paraméterek ismeretében a szűrő karakterisztikus egyenletének η_1 és η_2 együtthatóit meghatározhatjuk. Az (5-1.) összefüggés kifejtéséből

$$\eta_1 = g_1 a_1 - h_1 a_2 \qquad \eta_2 = g_2 a_1 - h_2 a_2 \qquad (9-14.)$$

Az η_1 és η_2 együtthatók így nyert számértékeit a 9-6.Táblázat tartalmazza.

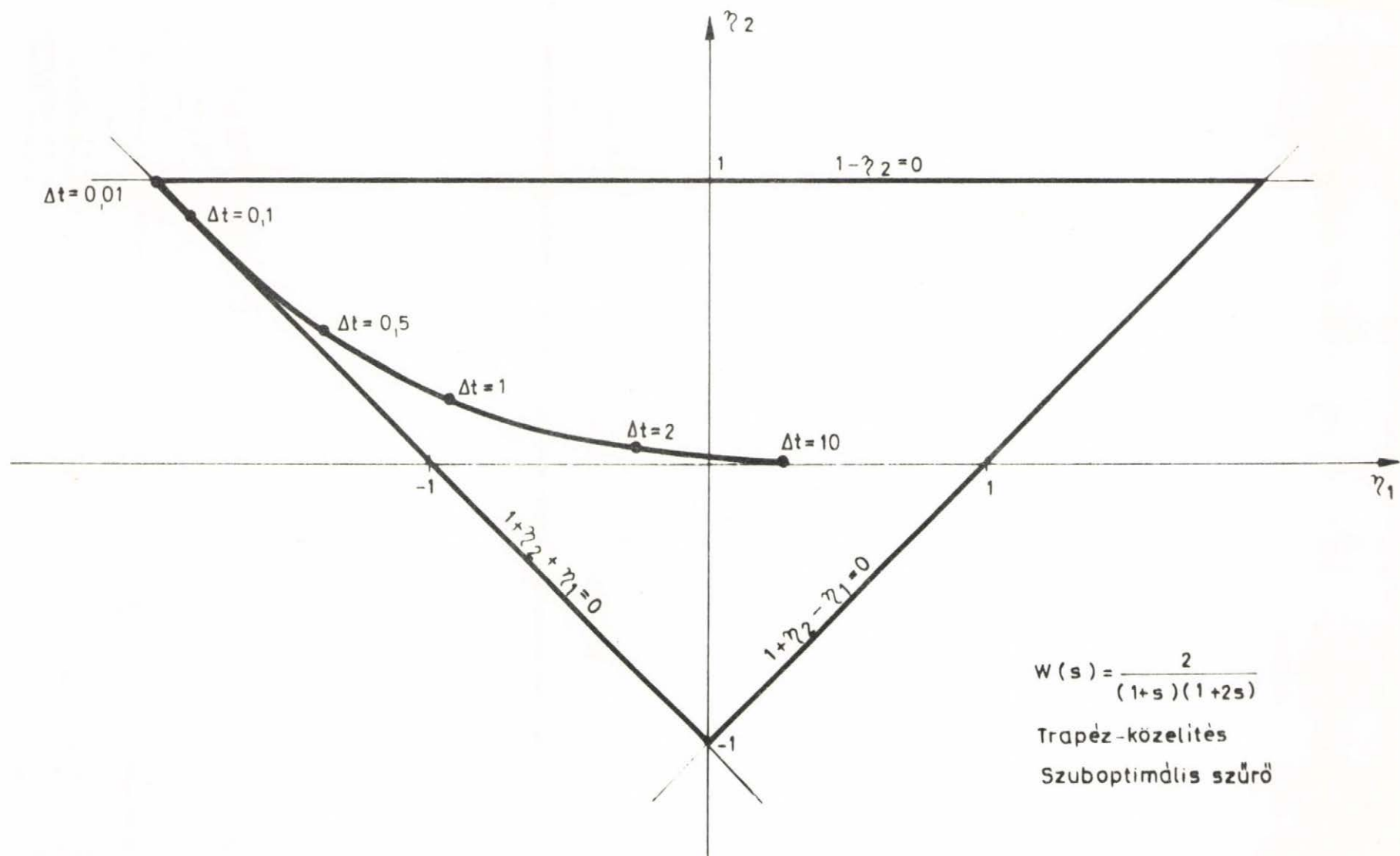
A 9-6.ábrában a $c=1$ esetre vonatkozó eredményeket ábrázoltuk az $\eta_1-\eta_2$ sikon, a stabilitás határaival együtt. Láthatóan a szuboptimális szűrő Δt vizsgált tartományában mindenütt stabil. Megfigyelhető viszont, hogy Δt kis értékeire a szűrő igen közel van a stabilitás határához. Ezért itt a $H(z^{-1})$ karakterisztikus polinom gyökeinek abszolút értéke közel egységnyi ($\Delta t=0,1$ esetén a gyökök $z_1^{-1}=1,1062$; $z_2^{-1}=1,0504$; $\Delta t=0,01$ esetén pedig $z_1^{-1}=1,0099$; $z_2^{-1}=1,0051$). Ez - mint a 9.2.alfejezetben már utaltunk rá - pontossági problémákra vezet a numerikus számításokban.

A 9.7.ábra a $c=10$ esetre vonatkozó eredményeket mutatja az $\eta_1-\eta_2$ sikon. Mint látható, a szuboptimális szűrő Δt vizsgált tartományának egy részében instabil.

A stabilitás határainak pontosabb megállapítása érdekében kiszámítottuk az $1-\eta_2$; $1+\eta_2+\eta_1$; $1+\eta_2-\eta_1$ mennyiségeket. Ezeket feltüntettük a 9-6.Táblázatban és - csak a $c=10$ esetre - Δt függvényében ábrázoltuk a 9-8.ábrában. A szűrő ott instabil, ahol a vizsgált három mennyiség bármelyike negatív. A 9-8.ábrából leolvasható, hogy ez hozzávetőleg az $1,05 < \Delta t < 4,5$ tartományban következik be.

A 9-7.Táblázat a triviális, szuboptimális és optimális jó-sági index értékeket tartalmazza numerikus és szimulációs számítások alapján (az utóbbiakat zárójelben). E vizsgálat leglényegesebb eredménye az, hogy - amint azt a 4.4. és 5.4.alfejezetekben mondtunk - az optimális szűrő akkor is meghatározható, ha a szuboptimális szűrő instabil. Figyelmet érdemel viszont, hogy ilyenkor - legalábbis a szóbanforgó rendszerre vonatkozólag - az optimális jó-sági index meglehetősen magas. A $c=10$ -es rendszer viselkedését egyébként a 9-9.ábrán grafikusán is bemutatjuk.

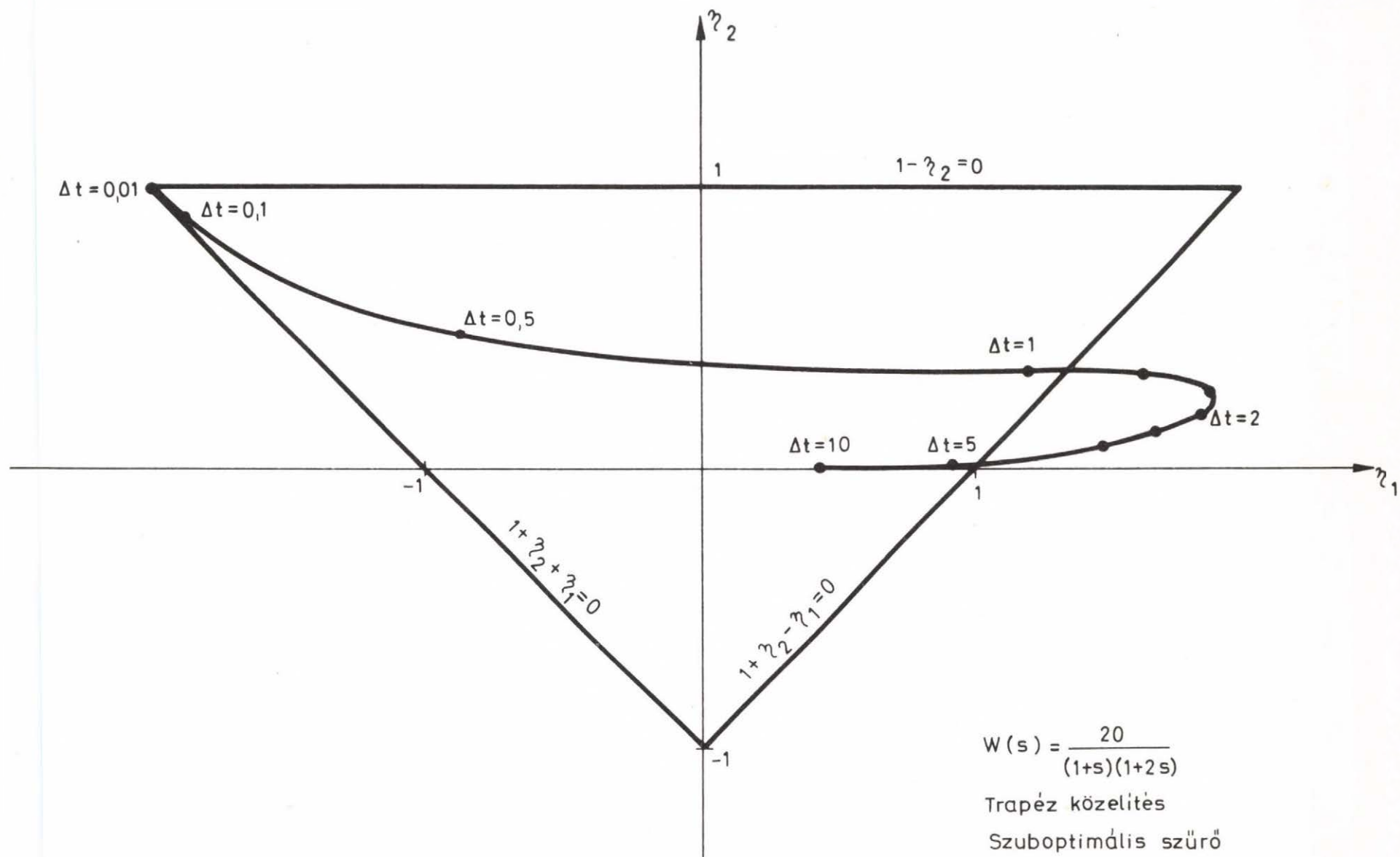
Végül a 9-10. és 9-11.ábrán a $c=10$; $\Delta t=0,5$ illetve $\Delta t=1,5$ esetekre a jó-sági indexet az a_1 szűrő-paraméter függvényében



$$W(s) = \frac{2}{(1+s)(1+2s)}$$

Trapez-közelítés
Szuboptimális szűrő

9-6. ábra



9-7. ábra.

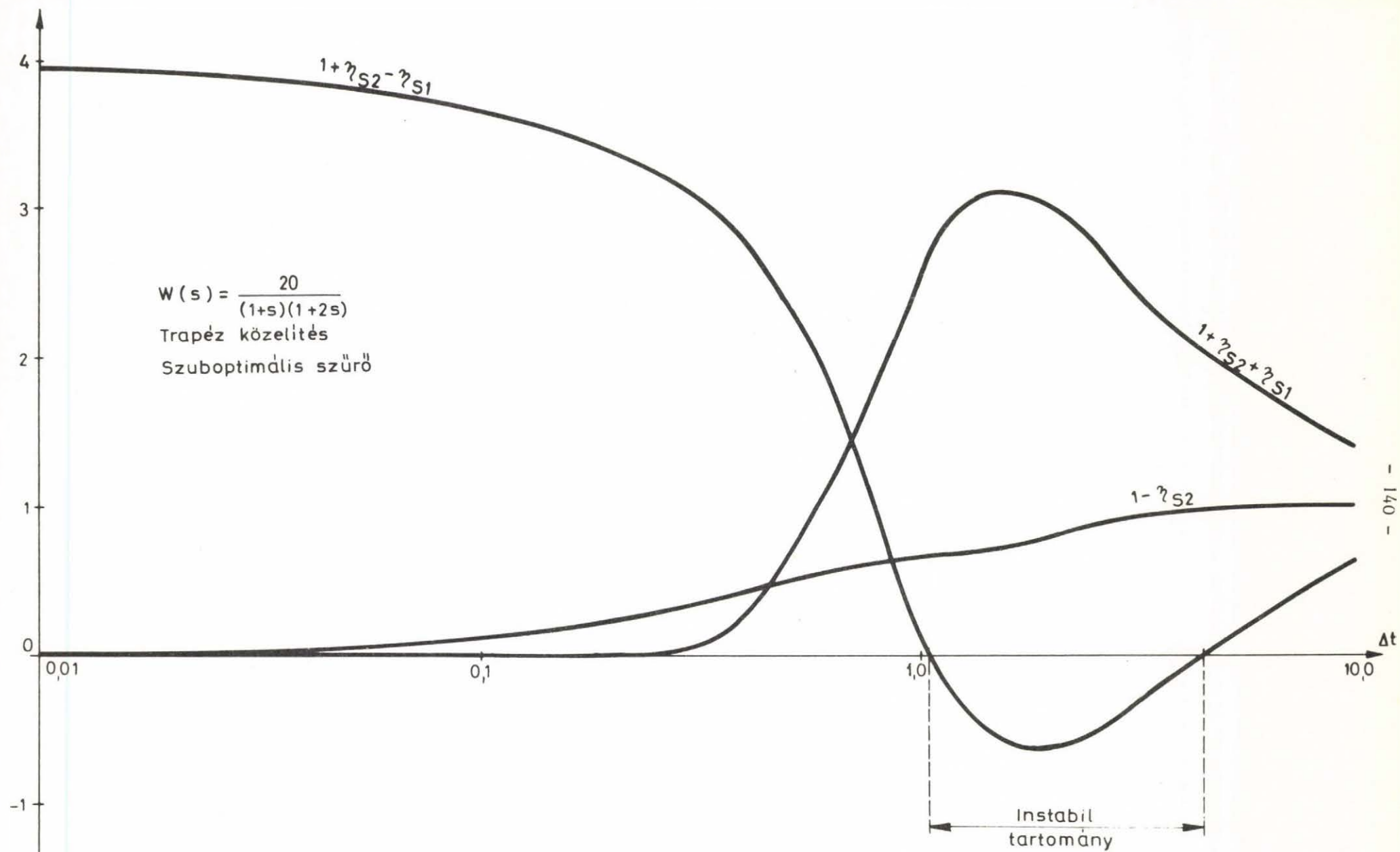
Δt	$c = 1$					$c = 10$				
	η_{S1}	η_{S2}	$1-\eta_{S2}$	$1+\eta_{S2}+\eta_{S1}$	$1+\eta_{S2}-\eta_{S1}$	η_{S1}	η_{S2}	$1-\eta_{S2}$	$1+\eta_{S2}+\eta_{S1}$	$1+\eta_{S2}-\eta_{S1}$
0,01	-1,9851	0,9851	0,0150	0,0000	3,9702	-1,9851	0,9851	0,0149	0,0000	3,9702
0,10	-1,8561	0,8607	0,1393	0,0046	3,7168	-1,8546	0,8607	0,1393	0,0061	3,7153
0,50	-1,3796	0,4726	0,5274	0,0930	2,8522	-0,8787	0,4955	0,5045	0,6168	2,3742
1,00	-0,9239	0,2264	0,7736	0,3025	2,2503	1,1973	0,3668	0,6332	2,5641	0,1695
1,20						1,6133	0,3372	0,6628	2,9505	-0,2761
1,50	-0,5517	0,1157	0,8843	0,5640	1,6674	1,8528	0,2880	0,7120	3,1408	-0,5648
2,00	-0,2463	0,0675	0,9325	0,8212	1,3138	1,8213	0,2022	0,7978	3,0235	-0,6191
2,50						1,6491	0,1490	0,8510	2,7981	-0,5001
3,00						1,4653	0,1039	0,8961	2,5692	-0,3614
5,00						0,9261	0,0254	0,9746	1,9515	0,0993
8,00						0,5407	0,0033	0,9967	1,5440	0,4626
10,00	0,2715	0,0006	0,9994	1,2721	0,7291	0,4104	0,0009	0,9991	1,4113	0,5905

$$W(s) = \frac{2c}{(1+s)(1+2s)}$$

Trapéz-közelítés

Szuboptimális szűrő

9-6.Táblázat



9-8. ábra.

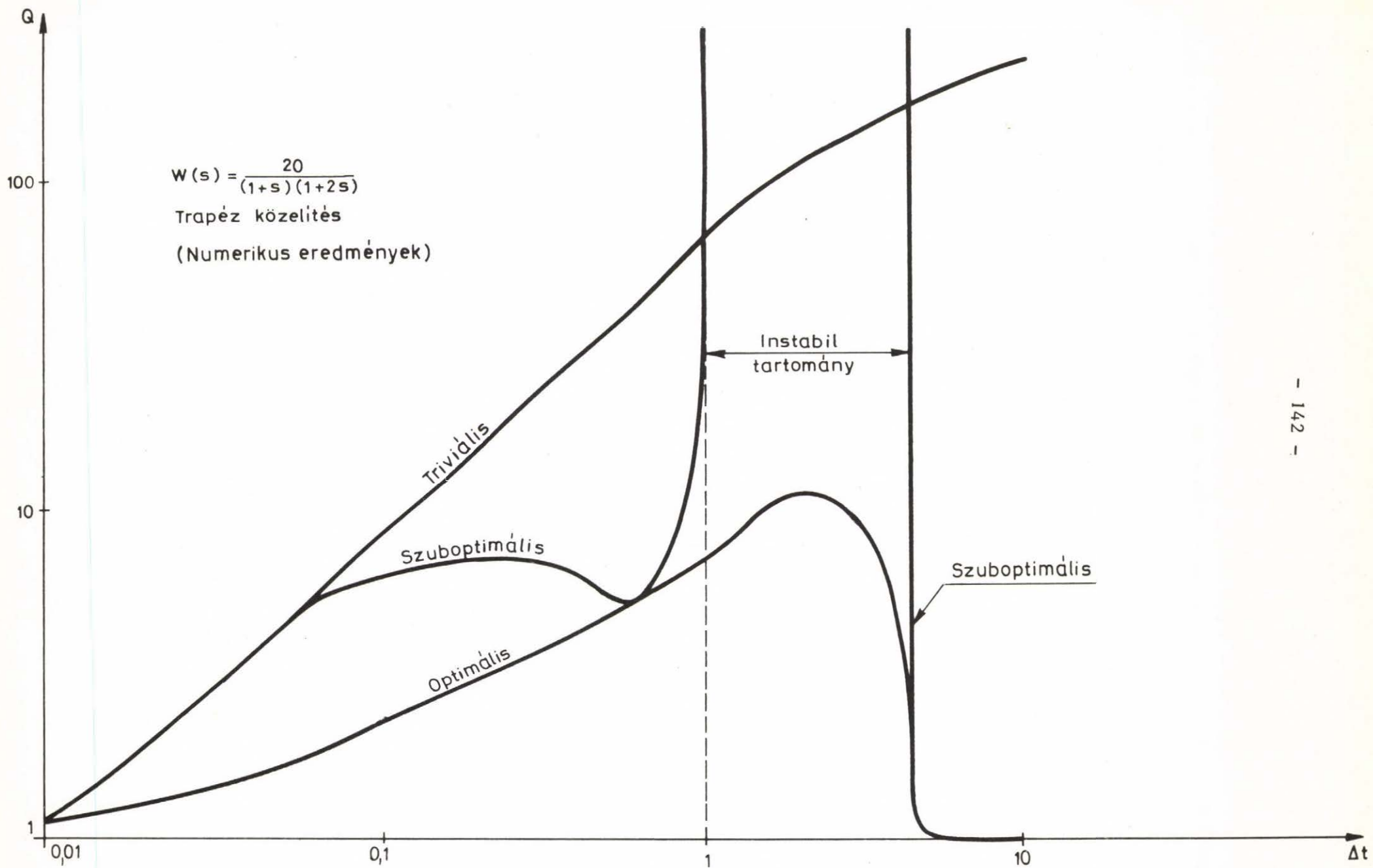
Δt	$c = 1$		$c = 10$				
	$Q(\underline{A}_T)$	$Q(\underline{A}_S)$	$Q(\underline{A}_T)$		$Q(\underline{A}_S)$		$Q(\underline{A}_C)$
0,01	(1,0032)	(1,0032)	(1,3194)	1,2418	(1,3190)	1,2418	1,1129
0,1	(1,0636)	(1,0634)	(7,3571)	7,6626	(5,8254)	6,0330	2,1340
0,5	(1,2993)	(1,2808)	(30,9253)	33,7833	(5,6780)	5,5555	4,8429
1,0	(1,5994)	(1,4936)	(60,9367)	64,0780	(16,0047)	16,3342	6,7132
1,2			(72,3181)	75,2168	(INSTAB)	INSTAB	7,7055
1,5			(88,3328)	90,7315	(INSTAB)	INSTAB	9,3967
2,0	(2,1075)	(1,6527)	(111,7490)	113,1671	(INSTAB)	INSTAB	11,6258
3,0			(145,9125)	145,5490	(INSTAB)	INSTAB	9,4887
5,0			(181,6004)	179,3222	(1,0580)	1,0621	1,0612
10,0	(3,3490)	(1,0419)	(235,8979)	233,2366	(1,0011)	1,0011	1,0011

$$W(s) = \frac{2c}{(1+s)(1+2s)}$$

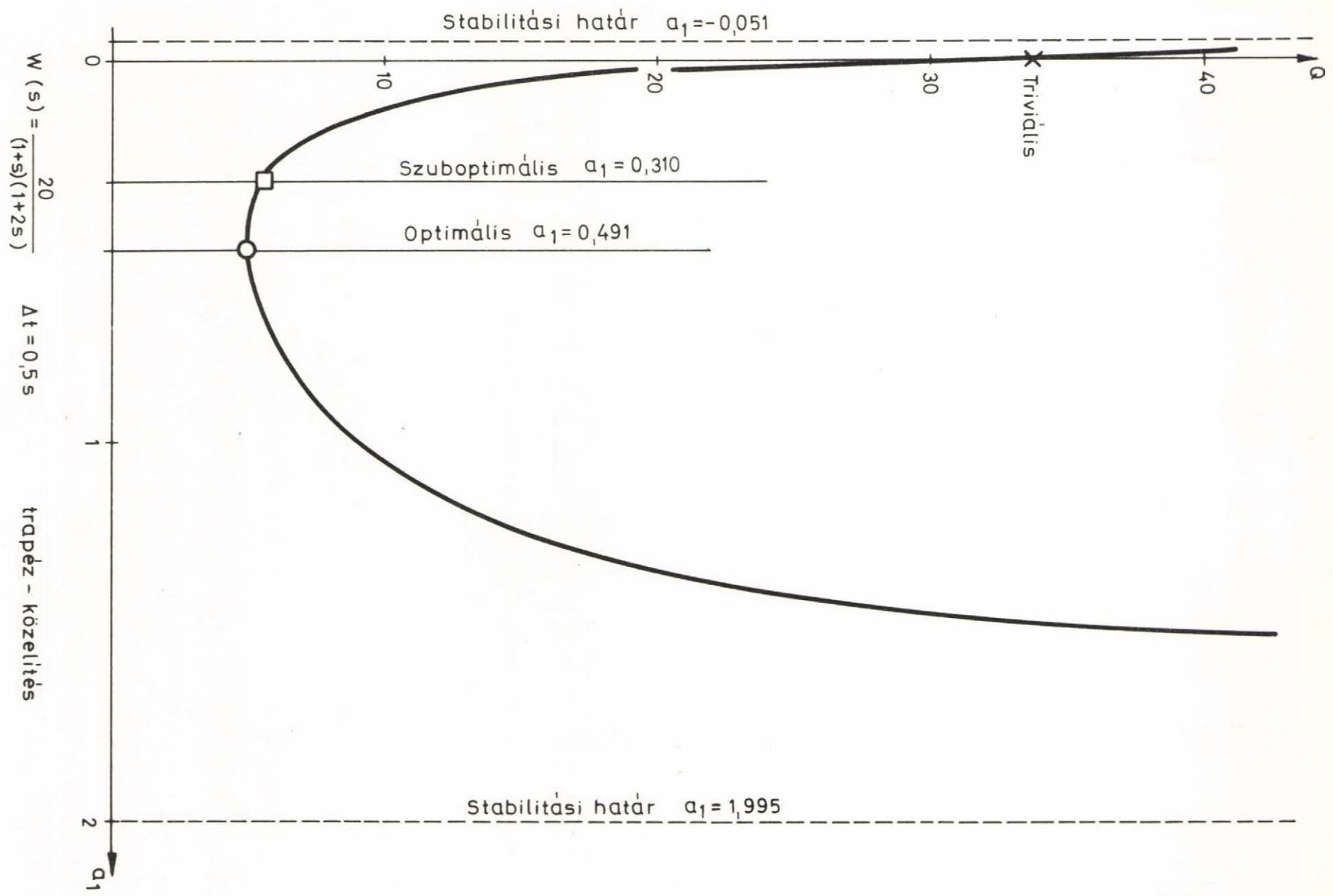
Trapéz-közelítés

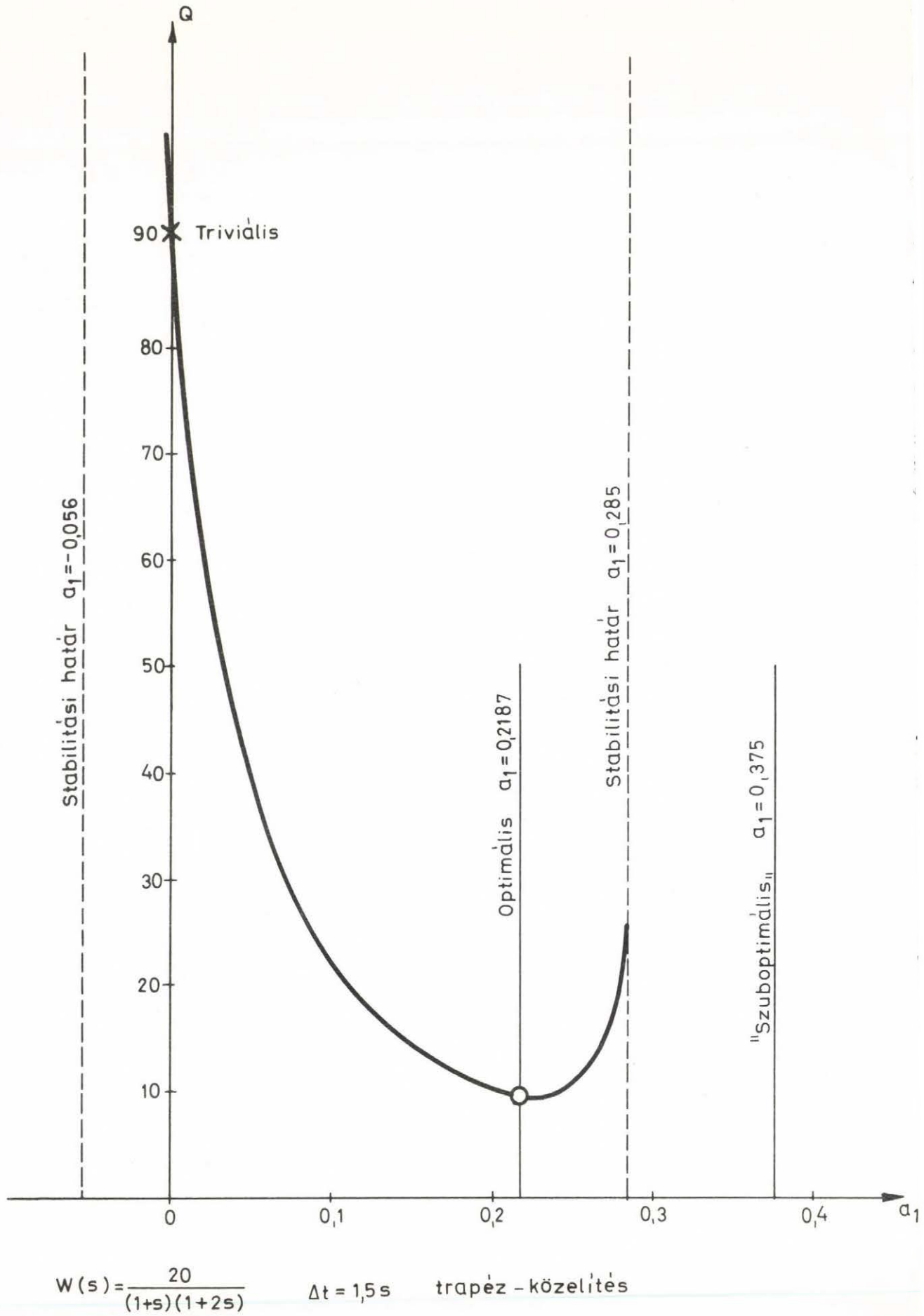
Numerikus (és szimulációs)
eredmények

9-7. Táblázat



9-9. ábra.





9-11. ábra.

ábrázoljuk (a másik, a_2 paramétert a_1 az egyenlőség-korláton keresztül meghatározza). Az ábrákon feltüntettük a stabilitás határait, valamint a triviális, szuboptimális és optimális pontokat. Láthatóan a szuboptimális pont $\Delta t=0,5$ esetén a stabil tartományba esik, $\Delta t=1,5$ esetén viszont azon kívül helyezkedik el. Érdekes még megfigyelni, hogy $\Delta t=0,5$ mellett a szuboptimális pont az optimumtól balra, $\Delta t=1,5$ mellett pedig attól jobbra található. 0,5 és 1,5 - illetve a stabilitási határ 1,05 - között van tehát egy olyan Δt érték, ahol a szuboptimális pont egybeesik az optimummal. A 9-9. ábrán ezt a közös pontot feltüntettük.

9.6. Érzékenységi vizsgálatok

A jelen érzékenységi vizsgálatok mindazokra a hatásokra kiterjednek, amelyeket a 6. Fejezetben elméletileg elemeztünk.

Ezek

- a, a folyamat-paraméterek becslési hibájának hatása,
- b, a zaj kovariancia-mátrix becslési hibájának hatása,
- c, a zaj zérustól különböző várható értékének hatása,
- d, a zaj időbeli korreláltságának hatása,
- e, a folytonos rendszer bemenő-jele közelítésének hatása.

A vizsgálatokat - a d, hatás kivételével - szimulációval végeztük, majd az így nyert eredmények egy részét - ellenőrzésképpen - egybevetettük a 6. Fejezetben levezetett formulák számszerű eredményeivel. Általában csak az egy-bemenet egy-kimenetű elsőrendű rendszer vizsgálatára szorítkoztunk, bár a leqlényegesebb hatást - a folyamat-paraméterek becslési hibáját - a két-bemenet két-kimenetű harmadrendű mintarendszeren is szimuláltuk. A következőkben - az első négy hatásra vonatkozóan - csak a téglalap-közelítés eredményeit adjuk meg; a trapéz-közelítéssel folytatott vizsgálatok eredményei lényeges többlet-információt nem tartalmaznak. A bemenő-jel közelítésének hatását - a probléma természetéből következően - csak téglalap-közelítésre vizsgáltuk. Mindvégig a szuboptimális \underline{A}_S szűrő-mátrixot vettük alapul és $\underline{P}_\xi = \underline{I}$ zaj kovariancia-mátrixot tételeztünk fel. Főleg a \underline{Q} jósági indexet

vizsgáltuk, mivel annak szimulációs pontossága jobb, mint az R indexé.

9.6.1. A folyamat-paraméterek becslési hibájának hatása

A paraméter becslések hibája szerinti érzékenységet úgy vizsgáltuk, hogy a $\hat{\theta}_i$ paraméter-becslést variáltuk a θ_i valódi paraméter-értékhez képest és megfigyeltük a jósági index ΔQ megváltozását. Egyszerre mindig csak egy paramétert variáltunk. A paraméter-becslés $\Delta \hat{\theta}_i$ hibáját a valódi θ_i érték $\pm 5\%$ -os és $\pm 10\%$ -os hányadára választottuk.

Amint a 6. Fejezetben kimutattuk, a paraméter-becslési hibák hatásának két összetevője van: az egyik a zajtól, a másik a valódi folyamat-változóktól függ. Arra is rámutattunk, hogy a lineáris érzékenységi függvények csak az első összetevőt tükrözik. A két hatás különválasztása céljából két vizsgálat-sorozatot végeztünk a hibás paraméter-becslésekkel: az egyiket zérus, a másikat pedig 10 egységnyi varianciájú folyamat bemenő-jellel. (A bemenő-jel ebben a vizsgálatban korrelálatlan volt.) Ha

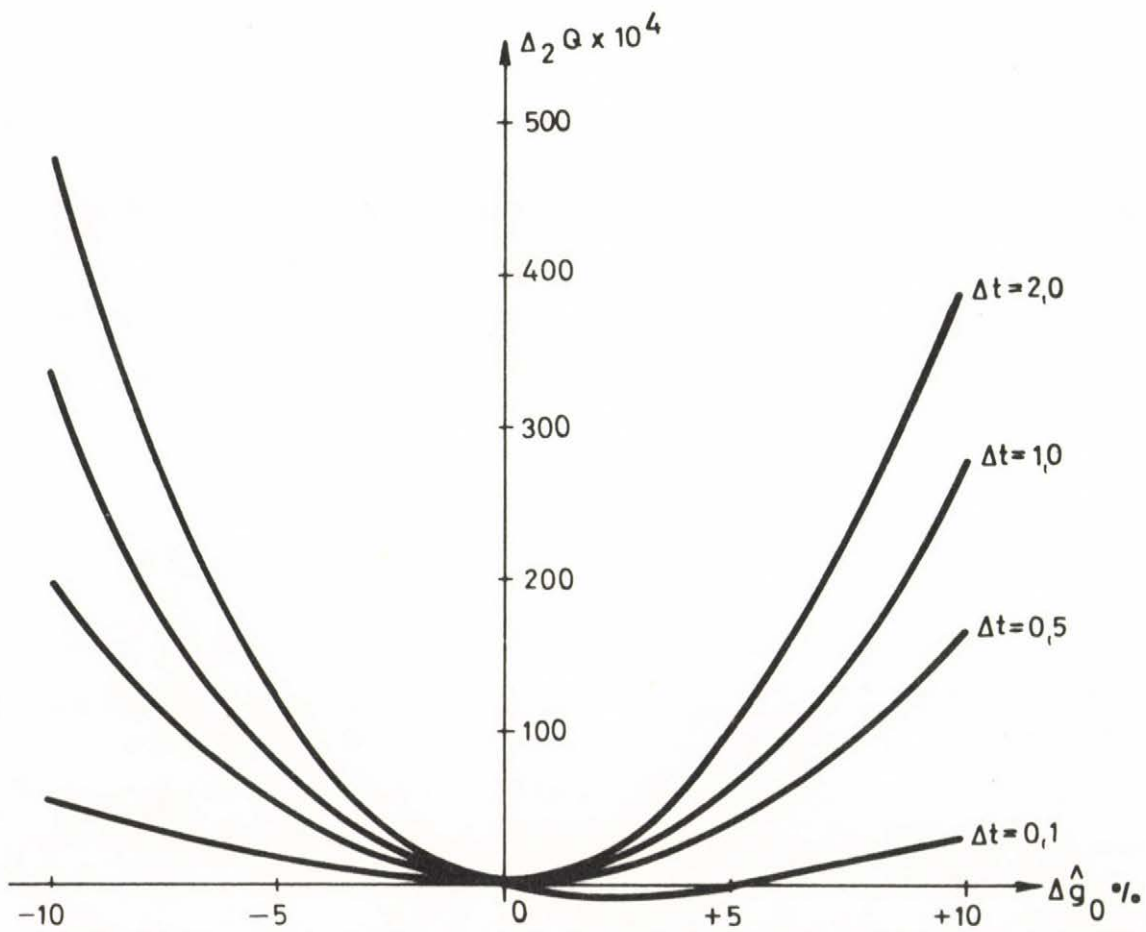
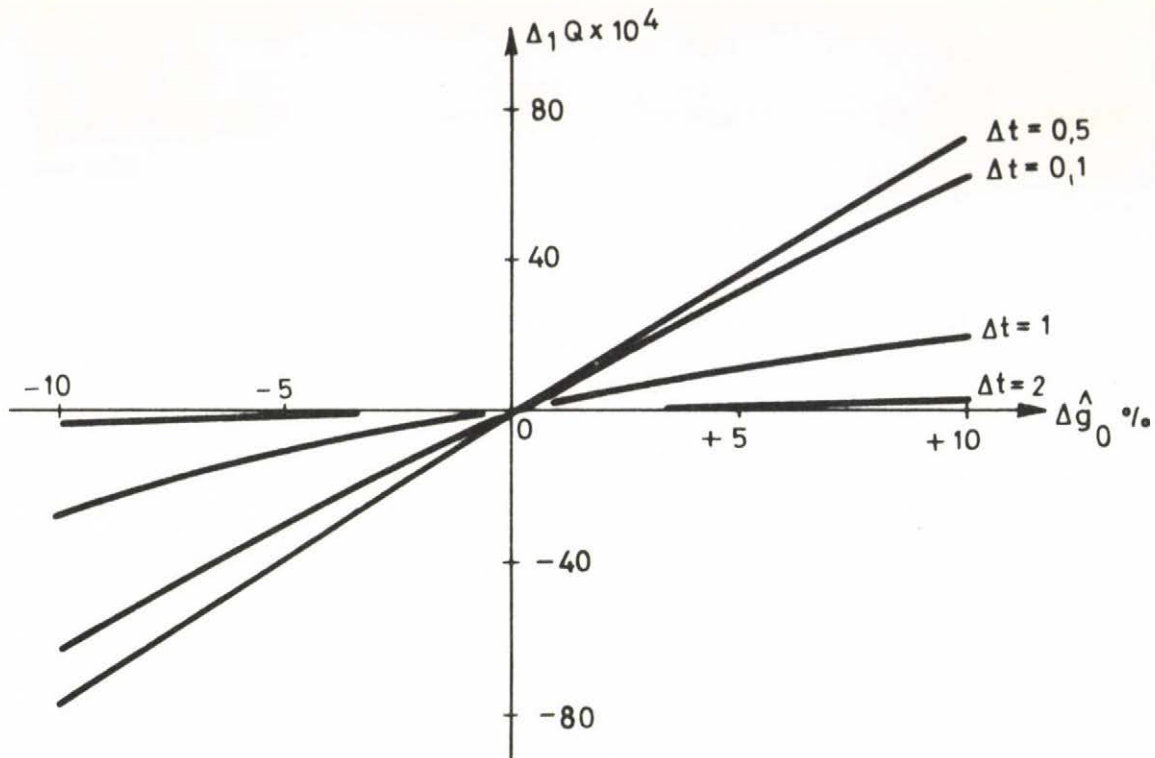
- Q_0 a jósági index hibamentes paraméter-becslésekkel (vagyis amikor $\hat{\theta}_i = \theta_i$),
- Q_1 a jósági index hibás paraméter-becsléssel ($\hat{\theta}_i \neq \theta_i$), zérus folyamat-bemenet mellett ($u(t)=0$),
- Q_2 a jósági index hibás paraméter-becsléssel ($\hat{\theta}_i \neq \theta_i$), zérustól különböző folyamat-bemenet mellett ($u(t) \neq 0$),

akkor

- $\Delta_1 Q = Q_1 - Q_0$ adja az első (a zajtól függő) összetevőt,
- $\Delta_2 Q = Q_2 - Q_1$ adja a második (a folyamat bemenő-jelétől függő) összetevőt.

Emlékeztetünk rá, hogy - amint azt a 6. Fejezetben megmutattuk - a Q és R jósági indexek érzékenysége a folyamat-paraméterek becslési hibája szerint azonos (viszont Q szimulációja pontosabb, ezért ezt vizsgáljuk).

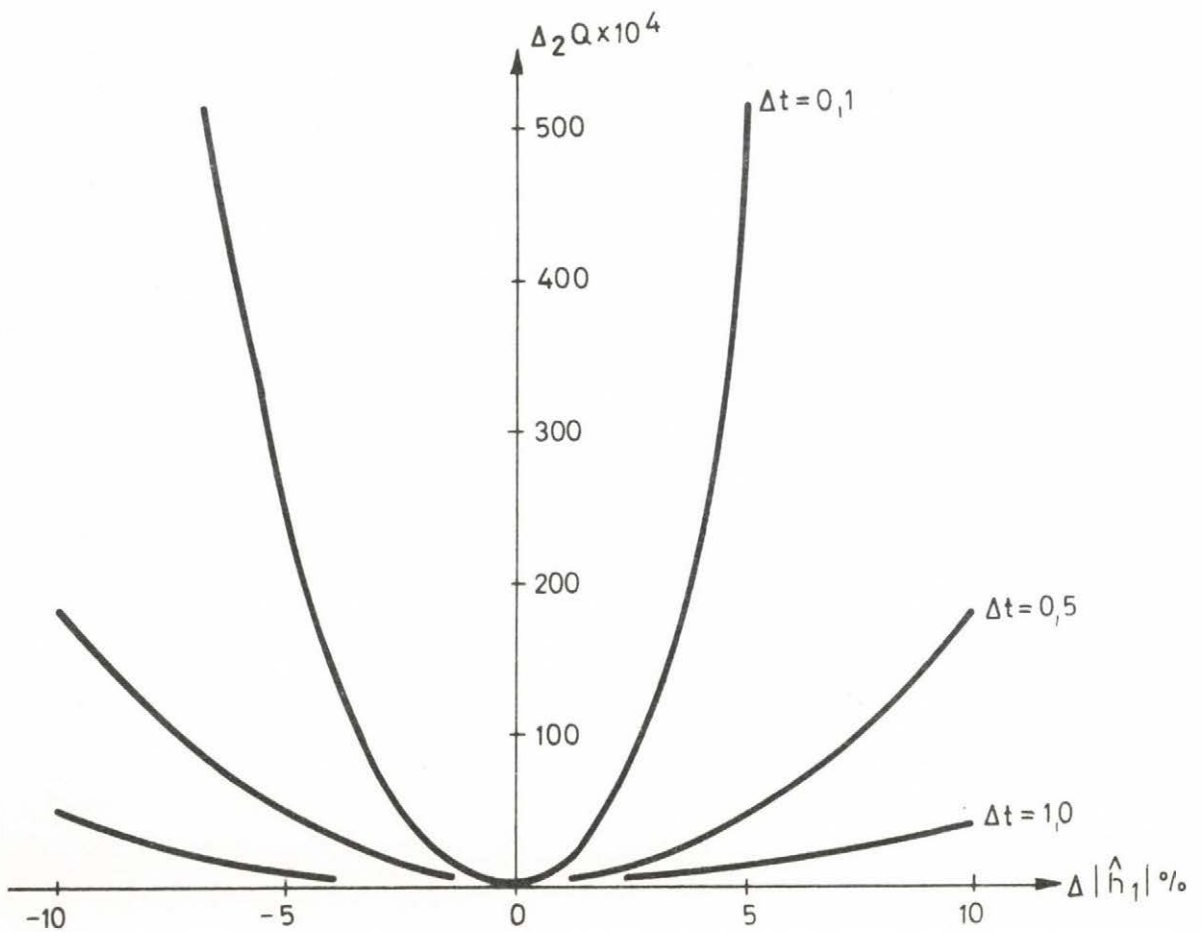
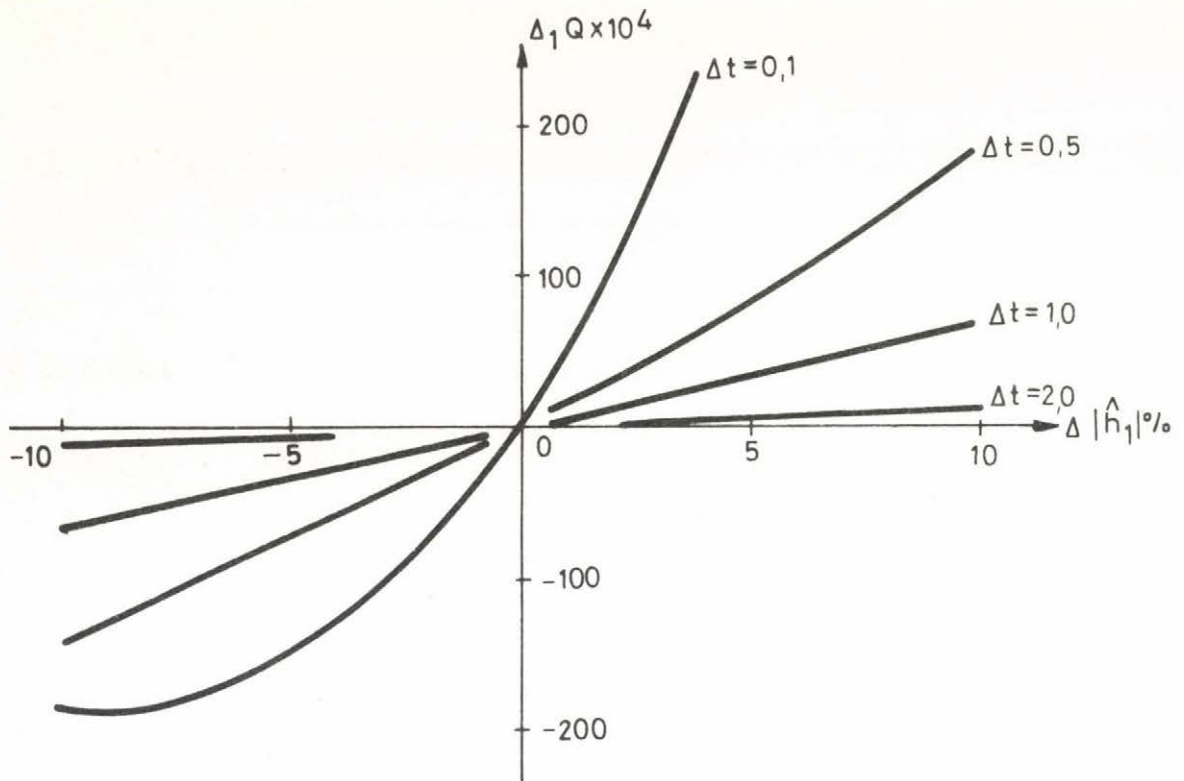
Az elsőrendű rendszerrel kapcsolatban a \hat{g}_0 és \hat{h}_1 paraméter-becslések hibájának hatását vizsgáltuk. A 9-12. ábra mutatja $\Delta \hat{g}_0$, a 9-13. ábra pedig $\Delta \hat{h}_1$ hatását, különválasztva a



$$W(s) = \frac{1}{1+s}$$

téglalap-közelítés, szuboptimális szűrő

9-12. ábra.



$$W(s) = \frac{1}{1+s}$$

téglalap - közelítés, szuboptimális szűrő

9-13. ábra.

$\Delta_1 Q$ és $\Delta_2 Q$ összetevőket. Láthatóan a zajtól függő $\Delta_1 Q$ összetevő viszonylag kicsi és gyakorlatilag lineáris (kivétel $\Delta \hat{h}_1$ hatása $\Delta t=0,1$ esetén: ekkor ugyanis ez a hatás a stabilitási határ közelébe viszi a szűrőt). A bemenő-jeltől függő $\Delta_2 Q$ összetevő nullára szimmetrikus kvadrátikus jellege jól tükröződik az ábrában, valamint az a körülmény is, hogy ez az összetevő a becslési hiba növekedésével igen jelentőssé nőhet.

A 9-8. Táblázatban összehasonlítottuk a 6. Fejezet (6-58.) és (6-59.) formuláinak kiértékelésével számított $\frac{dQ}{dg_0}$ és $\frac{dQ}{d\hat{h}_1}$ lineáris érzékenységi függvényeket a szimulációval a zajfüggő összetevőre nyert $\frac{\Delta_1 Q}{\Delta g_0}$ illetve $\frac{\Delta_1 Q}{\Delta \hat{h}_1}$ különbségi hányadosokkal. Láthatóan az egyezés igen jó, annak ellenére, hogy a szimuláció a szuboptimális szűrőre vonatkozik, az elméleti eredmények pedig szigorúan csak az optimumra érvényesek (persze itt a szuboptimum nagyon közel van az optimumhoz). Lényeges viszont hangsúlyozni, hogy a lineáris érzékenységi függvény a $\Delta_2 Q$ nullára szimmetrikus kvadrátikus összetevőt nem érzékelteti.

Megvizsgáltuk a 9.4.2. alfejezetben bevezetett két-bemenet két-kimenetű harmadrendű rendszer érzékenységét is $c=1$ és téglalap-közelítés mellett. A diszkrét modell paramétereinek nagy száma miatt itt nem azok, hanem a folytonos rendszer s_1 , s_2 és s_3 pólusainak becslését variáltuk (a pólusok pontos értéke $s_1=-1s^{-1}$, $s_2=-0,5s^{-1}$, $s_3=-1,25s^{-1}$). A szimulációs eredményeket $\Delta t=0,1s$ illetve $\Delta t=0,5s$ mintavételi intervallum mellett a 9-14. és 9-15. ábra mutatja. Láthatóan az eredmények jellegükben megegyeznek azokkal, amelyeket az elsőrendű rendszerre kaptunk.

9.6.2. A zaj kovariancia-mátrix becslési hibájának hatása

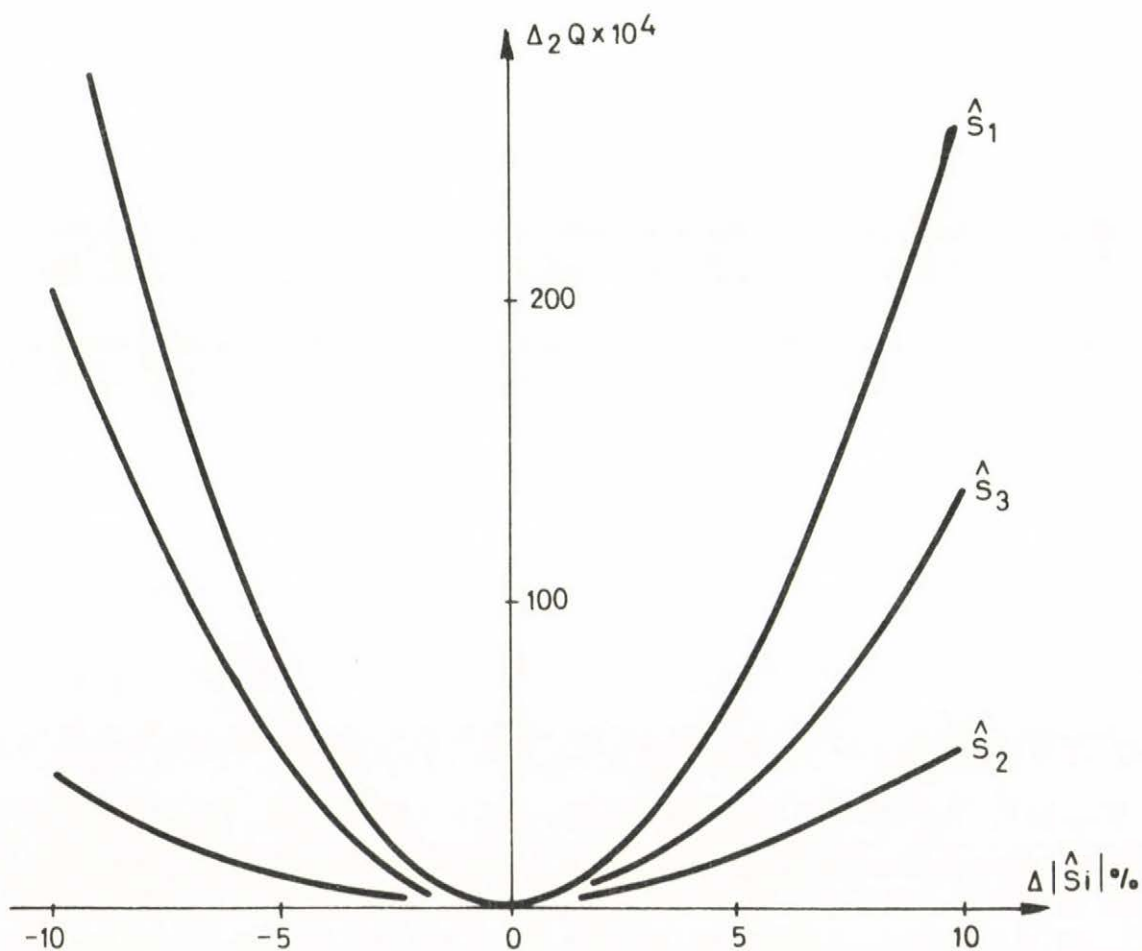
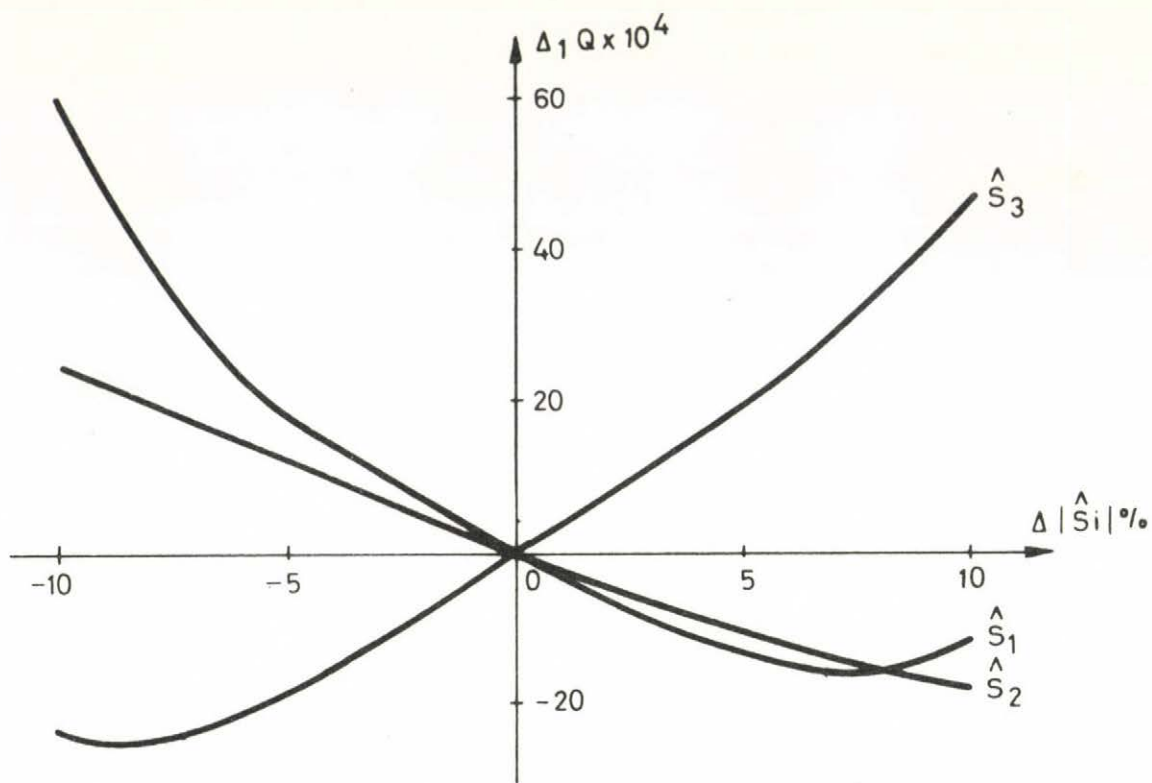
Most az egy-bemenet egy-kimenetű rendszer P_{ξ} zaj kovariancia-mátrixa \hat{P}_{ξ} becslésének \hat{p}_{11} , \hat{p}_{22} , $\hat{p}_{12}=\hat{p}_{21}$ elemeit variáltuk külön-külön $\pm 0,05$ és $\pm 0,10$ értékkel. (Az elemek együttes, a valódi értékkel arányos variálásával szemben a jó-sági index invariáns.) A szimulációs eredményeket $c=1$ és

$\frac{\Delta t}{T}$	$\frac{dQ}{d\hat{g}_0}$	$\frac{\Delta_1 Q}{\Delta \hat{g}_0}$	$\frac{dQ}{d\hat{h}_1}$	$\frac{\Delta_1 Q}{\Delta \hat{h}_1}$
0,1	0,7012	0,7033	-0,4112	-0,45
0,5	0,1889	0,1906	-0,2673	-0,2690
1,0	0,0362	0,0364	-0,1731	-0,1793
2,0	0,0017	0,0023	-0,0670	-0,0702

$$W(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

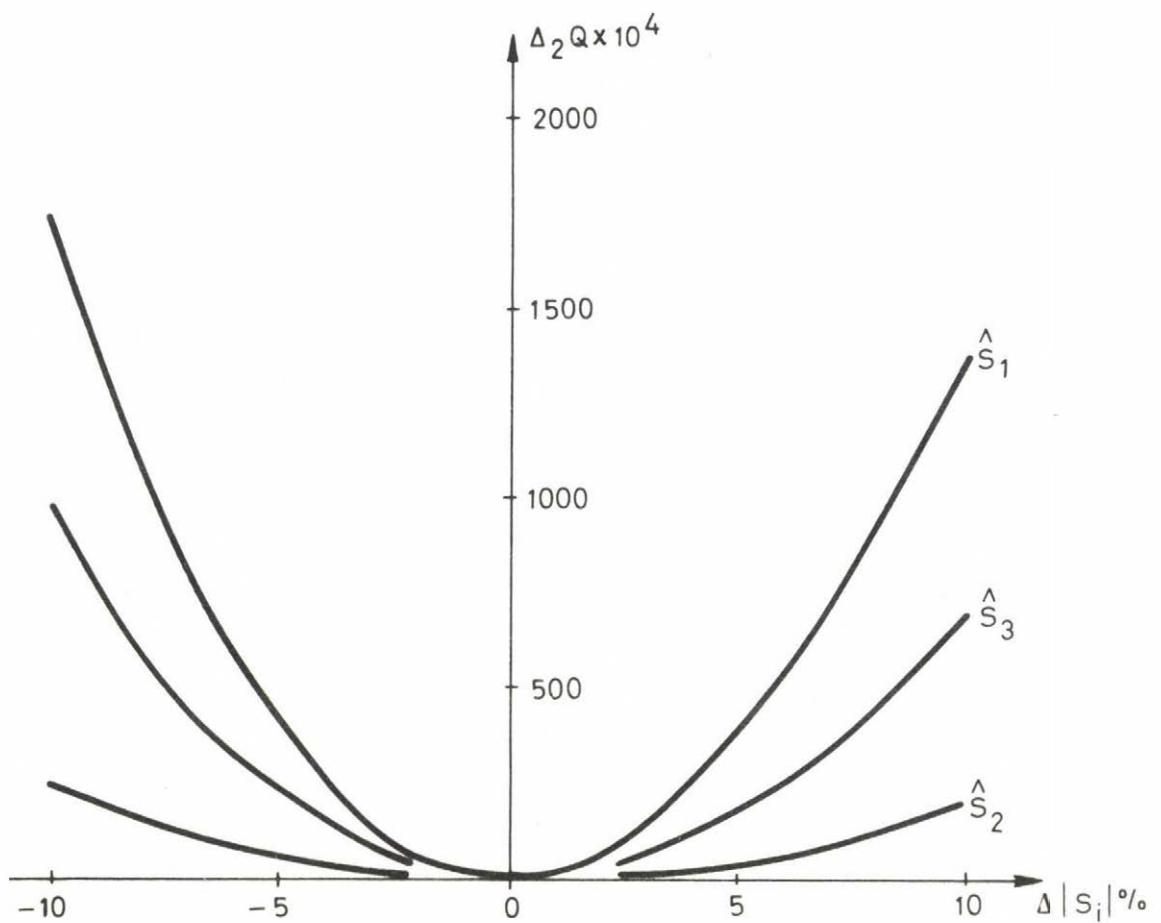
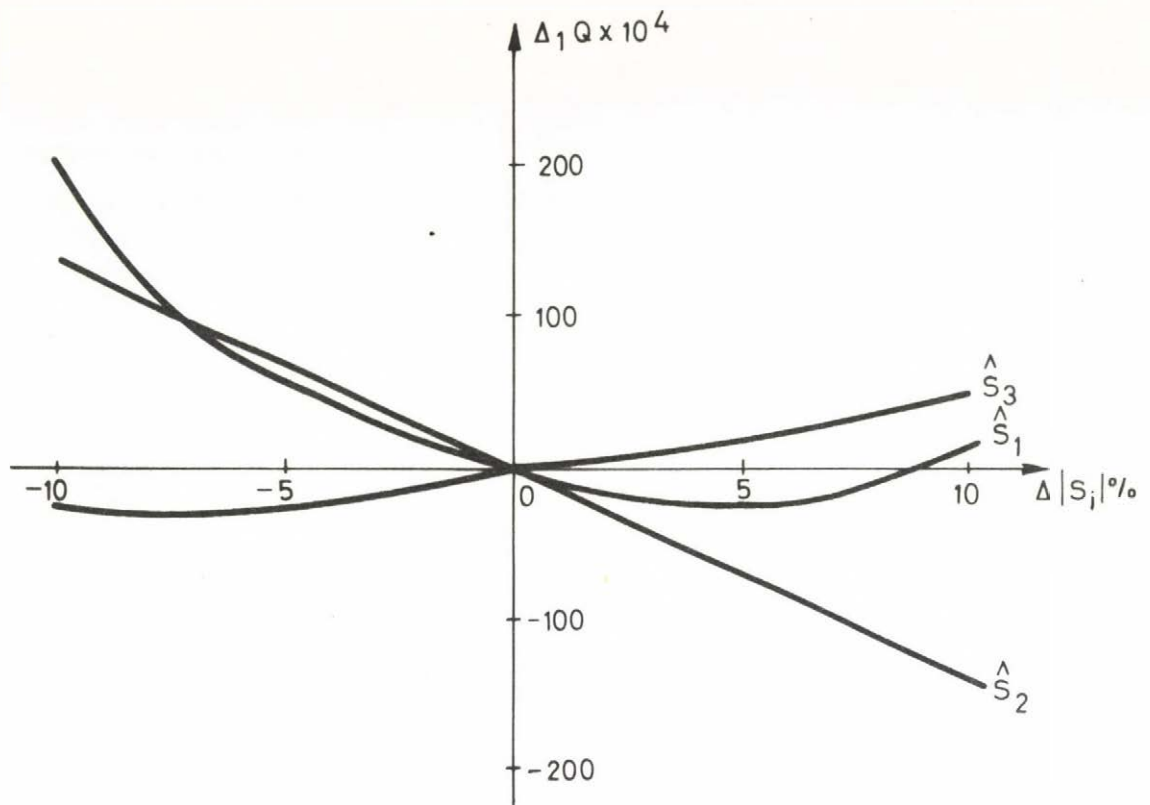
téglalap-közelítés

9-8. Táblázat



$k=m=2$ $n=3$ $c=1$ $\Delta t=0,1s$ téglalap / szuboptimális

9-14. ábra.



$k=m=2$ $n=3$ $c=1$ $\Delta t=0,5s$ téglalap/szuboptimális

$c=10$ mellett $\Delta t/T=1$ -re vonatkozólag a 9-16. ábra mutatja. Látható, hogy a görbék zérusra szimmetrikus kvadrátikus jellegűek, s a jósági index megváltozása viszonylag jelentéktelen. Emlékeztetünk rá, hogy a 6. Fejezet elméleti megfontolásai szerint a zaj kovariancia-mátrix becslési hibájára vonatkozó lineáris érzékenység az optimum helyén zérus, mégpedig mind az \underline{R} , mind a \underline{Q} jósági indexszel kapcsolatban.

9.6.3. A zaj zérustól különböző várható értékének hatása

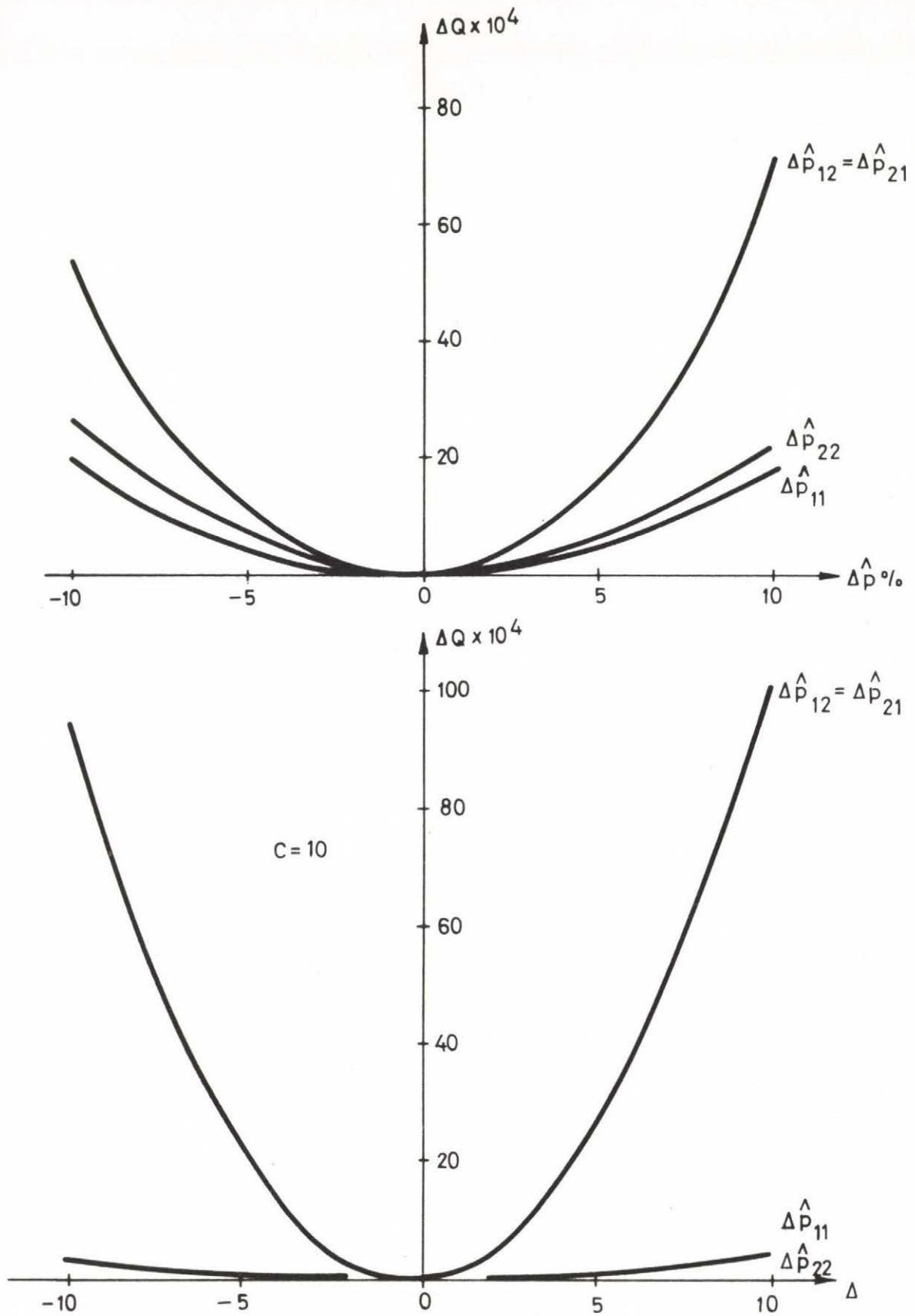
A zaj zérustól különböző várható értékének hatását a 6.4.3. alfejezetben tárgyalt mindkét szituációra vizsgáltuk.

A két szituáció röviden a következőképpen jellemezhető:

1. A zérus várható értékű $\underline{\xi}_0 = \underline{P}_{\xi_0}$ korrelációs mátrixu $\underline{\xi}_0(t)$ zajhoz egy $\Delta \underline{\xi}$ állandót adunk; az így nyert $\Delta \underline{\xi}$ várható értékű $\underline{\xi}(t)$ zaj kovariancia-mátrixa $\underline{P}_{\xi} = \underline{P}_{\xi_0}$, korrelációs mátrixa pedig $\underline{P}_{\xi} = \underline{P}_{\xi_0} + \Delta \underline{\xi} \Delta \underline{\xi}^T$.
2. A \underline{P}_{ξ} korrelációs mátrixu $\underline{\xi}(t)$ zaj várható értéke $\underline{\xi}_e \neq \underline{0}$; ezért kovariancia mátrixa $\underline{P}_{\xi} = \underline{P}_{\xi} - \underline{\xi}_e \underline{\xi}_e^T$.

A két szituációt egy-bemenet egy-kimenetű elsőrendű rendszeren szimuláltuk téglalap-közelítéssel és szuboptimális szűrővel. Az első szituációban $\underline{P}_{\xi_0} = \underline{I}$, a másodikban $\underline{P}_{\xi} = \underline{I}$. A $\Delta \underline{\xi}$ illetve $\underline{\xi}_e$ vektor két elemét egyenként variáltuk; a kereszthatásokat nem vizsgáltuk. Mivel a vizsgált hatás nyilvánvalóan szimmetrikus ($\Delta \xi_i^2$ -tel illetve ξ_{ei}^2 -tel arányos), csak pozitív $\Delta \xi_i$ illetve ξ_{ei} értékeket vettünk figyelembe, mégpedig a 0,05 és 0,1 pontokat. A szimulációs eredményeket a 6.6.2. alfejezet formuláinak analitikus kiértékelésével is egybevetettük.

A 9-9. Táblázat együtt mutatja a szimulációs és analitikus eredményeket (az előbbieket zárójelben) a \underline{Q} jósági index megváltozására vonatkozóan, $c=1$, $\frac{\Delta t}{T} = 0,1; 0,5; 1,0$ mellett. A táblázatból jól látható a hatás kvadrátikus jellege, valamint hogy \underline{Q} megváltozásainak nagysága igen kicsiny. Az is látható, hogy a két szituáció lényegében azonos megváltozásokra vezet, végül hogy a szimulációs és analitikus eredmények jól egyeznek.



$$W(s) = \frac{C}{1+sT}$$

$$\frac{\Delta t}{T} = 1$$

téglalap / szuboptimális

9-16. ábra.

$\frac{\Delta t}{T}$	Első szituáció				Második szituáció			
	$\Delta Q \times 10^4$ ha $\Delta \xi_1 =$		$\Delta Q \times 10^4$ ha $\Delta \xi_2 =$		$\Delta Q \times 10^4$ ha $\xi_{e1} =$		$\Delta Q \times 10^4$ ha $\xi_{e2} =$	
	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10
0,1	(15)	(64) 68	(-1)	(-3) -3	(14)	(61) 64	(0)	(0) 1
0,5	(4)	(16) 16	(-1)	(-3) -3	(3)	(11) 11	(0)	(2) 2
1,0	(1)	(4)	(0)	(-1)	(0)	(2)	(0)	(1)

$$W(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

téglalap közelítés/szuboptimális szűrő

(szimulációs) és analitikus
eredmények

9-9. Táblázat

Az \underline{R} jósági index megváltozásai - bár elvileg különbözőek - nagyságrendjükben és jellegükben azonosak a \underline{Q} jósági index megváltozásaival, ezért az ezekre vonatkozó számszerű eredmények részletezésétől eltekintünk.

9.6.4. A zaj időbeli korreláltságának hatása

A szimulált zaj időbeli korreláltsága nehezen tartható kézben, ezért ezt a hatást szimulációval nem vizsgáltuk. Ugyanakkor ez a hatás - mint nemkívánatos zavarás - minden szimulációs vizsgálatunkban jelen volt.

A 9-lo.Táblázatban - a 6.6.3.alfejezet formulái alapján - megadtuk az \underline{R} és \underline{Q} jósági indexek elméleti megváltozását a Δt eltoláshoz tartozó $\underline{P}_{\xi\xi}(\Delta t) \neq \underline{Q}$ zaj kovariancia-mátrix hatására elemenként. Az eredmények egy-bemenet egy-kimenetű elsőrendű rendszerre vonatkoznak téglalap-közelítés és szuboptimális szűrő, valamint $c=1$ és $\underline{P}_{\xi} = \underline{I}$ mellett.

A 9-lo.Táblázat eredményeit a 9-1.Táblázat kísérleti $p_{ij}(\ell\Delta t)$ adataival egybevetve érzékelhető, hogy a szimulált zaj nem tökéletes időbeli korrelálatlansága milyen mértékű szimulációs hibákat okoz. A 9-lo.Táblázatból egyébként az is látszik, hogy a \underline{Q} index érzékenysége kisebb - többnyire igen jelentősen - mint az \underline{R} index érzékenysége; ez indokolja a \underline{Q} index szimulációjának nagyobb pontosságát.

9.6.5. A folytonos rendszer bemenő-jele közelítésének hatása

A téglalap-leírás trapéz-leíráshoz viszonyított közelítési hibájának hatását vizsgáltuk - mind szimulációval, mind analitikusan. Amint a 6.5. és 6.6.4.alfejezetekben megmutattuk, ez a hatás jelentős mértékben függ a rendszer bemenő-jelének tulajdonságaitól (nevezetesen a különböző eltolásokhoz tartozó korrelációs függvényeitől).

A szokásos egy-bemenet egy-kimenetű elsőrendű rendszert tekintettük szuboptimális szűrővel $\underline{P}_{\xi} = \underline{I}$ mellett.

A szimuláció során a közelítési hibát úgy állítottuk elő, hogy a folyamat-modellben trapéz-közelítést, a szűrőben tégl-

$\frac{\Delta t}{T}$	$\frac{dR}{dp_{11}(\Delta t)}$	$\frac{dR}{dp_{12}(\Delta t)}$	$\frac{dR}{dp_{21}(\Delta t)}$	$\frac{dR}{dp_{22}(\Delta t)}$	$\frac{dQ}{dp_{11}(\Delta t)}$	$\frac{dQ}{dp_{12}(\Delta t)}$	$\frac{dQ}{dp_{21}(\Delta t)}$	$\frac{dQ}{dp_{22}(\Delta t)}$
0,01	0,00980	-0,00020	-0,01960	-0,00020	0,00961	0,00010	0,00010	0,00000
0,02	0,01922	-0,00076	-0,03842	-0,00076	0,01845	0,00037	0,00037	0,00001
0,05	0,04529	-0,00441	-0,09036	-0,00441	0,04078	0,00199	0,00199	0,00009
0,10	0,08216	-0,01550	-0,16285	-0,01550	0,06607	0,00629	0,00629	0,00060
0,20	0,13571	-0,04763	-0,26278	-0,04763	0,08527	0,01546	0,01546	0,00281
0,50	0,19447	-0,13252	-0,33680	-0,13252	0,05364	0,02111	0,02111	0,00830
1,00	0,16123	-0,14564	-0,23039	-0,14564	0,01114	0,00704	0,00704	0,00445
2,00	0,06666	-0,06596	-0,07628	-0,06596	0,00040	0,00035	0,00035	0,00030
5,00	0,00337	-0,00337	-0,00339	-0,00337	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

$$W(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

téglalap-közelítés / szuboptimális szűrő

Analitikus eredmények

9-10. Táblázat

lap-közelítés alkalmaztunk. Az $u(t)$ bemenő-jelet a (9-3.) képlet szerinti diszkrét taggal generáltuk időben korrelálatlan jelsorozatból. Ilyen elsőrendű taggal generált jel korrelációs függvényeit az

$$E\{u(t-\ell\Delta t) u(t)\} = [\alpha(\Delta t)]^\ell \sigma_u^2 \quad (9-15.)$$

összefüggés írja le, ahol $\sigma_u^2 = E\{u^2(t)\}$. Különböző mintavételi intervallumokkal vizsgáltuk a rendszert; a generáló diszkrét tagból következően $\alpha(\Delta t) = 0,9$ volt Δt minden értékére.

A Q jósági index szimulációval nyert megváltozásait $\sigma_u = 1; 2; 5$ értékekre a 9-11. Táblázat mutatja (zárójeles adatok). A $\sigma_u = 1$ esetre vonatkozó eredményeket analitikusan is ellenőriztük a 6.6.4. alfejezet formulái alapján, s az így kapott adatokat is feltüntettük a 9-11. Táblázatban.

A fentiekben vázolt vizsgálat-sorozat - amikor $\alpha(\Delta t) = \text{konst.}$ Δt minden értékére - nem konzisztens abban az értelemben, hogy az ilyen tulajdonságu diszkrét jelsorozatok nem ugyanazon folytonos jel (különböző Δt -vel való) mintavételezéséből származnak. Konzisztenssé tehető a vizsgálat azzal, hogy $\alpha(\Delta t) = \text{konst.}$ helyett egy $\alpha^*(\Delta t) = [\alpha(1)]^{\Delta t}$ tényezővel számolunk, ahol $\alpha(1)$ a folytonos jel 1 sec eltoláshoz tartozó korrelációs értéke. Ilyen értelmű szimulációs vizsgálatokra nem került sor, viszont az áttérést - $\alpha(1) = 0,9$ mellett - analitikusan elvégeztük, és ezeket az eredményeket is feltüntettük a 9-11. Táblázatban.

A 9.3. alfejezetben utaltunk arra, hogy hibamentes körülmények között a téglalap-leírás jósági indexe kedvezőbb, mint a trapéz-leírásé. A bemenő-jel közelítése miatt a téglalap-leírás jósági indexéhez hozzáadódó eltérés függ a bemenő-jel σ_u szórástól. Egy adott tulajdonságu bemenő-jelre meg lehet határozni σ_u -nak azt a határértékét, amely mellett a hibás téglalap-leírás jósági indexe éppen megegyezik a (hibátlannak feltételezett) trapéz-leírás indexével. Ezeket a határértékeket is feltüntettük a 9-11. Táblázatban.

A téglalap-leírás $c=1$, $\alpha^*(\Delta t) = 0,9^{\Delta t}$ esetre vonatkozó $Q(\sigma_u)$ függvényeit grafikusan is bemutatjuk a 9-17. ábrán. Itt be-

c	$\frac{\Delta t}{T}$	$\alpha(\Delta t)$	$\Delta Q \times 10^4 \text{ ha}$			σ_u határ	$\alpha^*(\Delta t)$	$\Delta Q \times 10^4 \text{ ha}$	σ_u határ
			$\sigma_u=1$	$\sigma_u=2$	$\sigma_u=5$				
1	0,1	0,9	(14) 12	(52)	(310)	2,23	0,9895	2	5,21
	0,2		(31) 29	(120)	(740)	2,58	0,9791	8	4,97
	0,5		(69) 70	(262)	(1730)	3,06	0,9487	38	4,13
	1,0		(90) 96	(391)	(2554)	3,25	0,9000	96	3,25
	2,0		(100) 101	(397)	(2518)	2,74	0,8100	190	1,99
	5,0		(37) 37	(150)	(937)	1,98	0,5905	152	0,98
10	0,1	0,9	(216) 272	(987)	(6630)	4,32	0,9895	31	12,85
	0,2		(303) 363	(1344)	(8888)	4,21	0,9791	73	9,11
	0,5		(369) 394	(1536)	(9826)	3,39	0,9487	203	4,73
	1,0		(334) 340	(1358)	(8570)	1,92	0,9000	340	1,92
	2,0		(234) 233	(938)	(5882)	0,85	0,8100	442	0,62
	5,0		(75) 73	(299)	(1871)	0,37	0,5905	304	0,18

$$W(s) = \frac{c}{1 + sT}$$

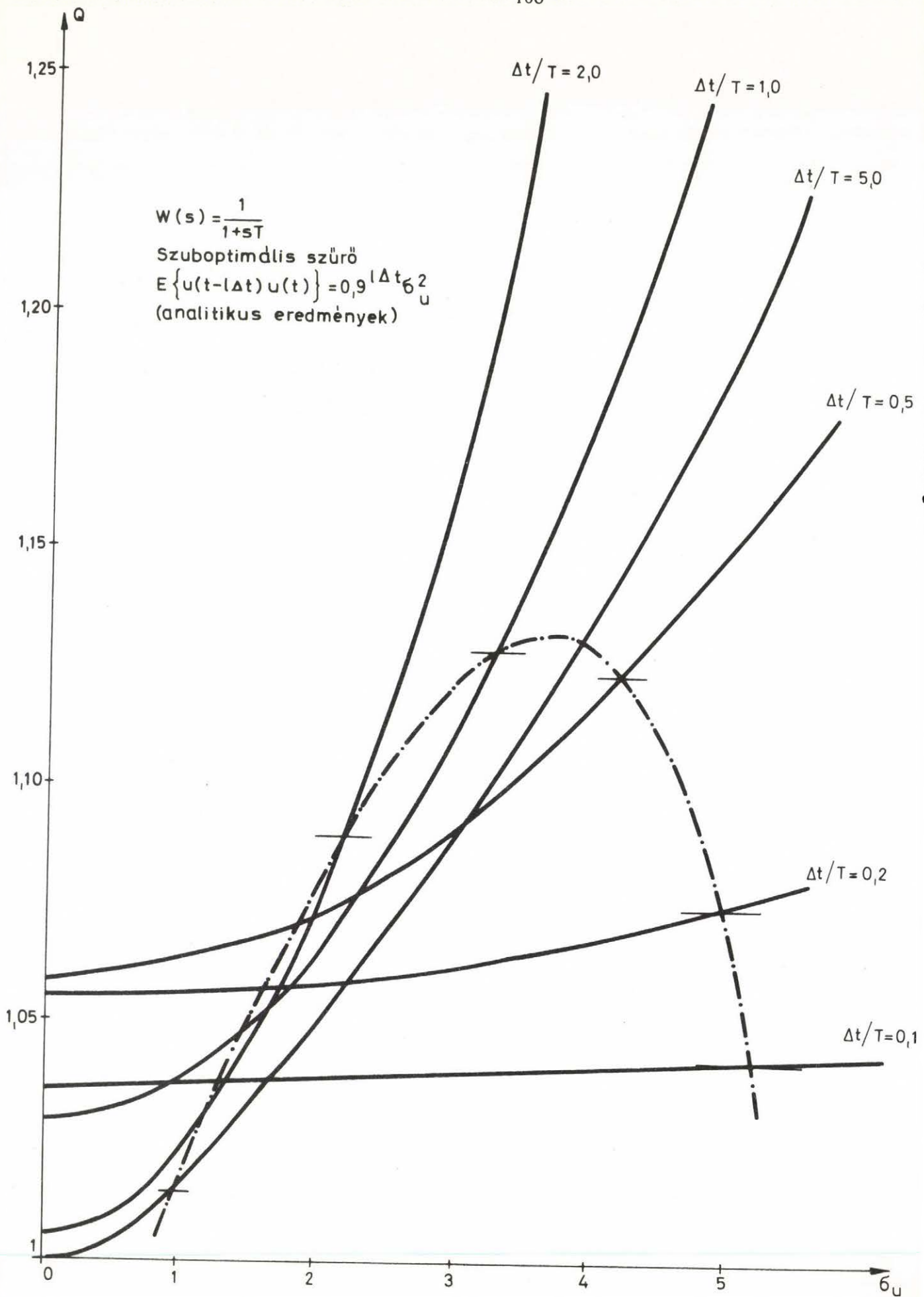
Szuboptimális szűrő

$$E\{u(t-\ell\Delta t)u(t)\} = \alpha^{\ell}(\Delta t)\sigma_u^2$$

$$\alpha^*(\Delta t) = 0,9^{\Delta t}$$

Analitikus (és szimulációs) eredmények

9-11. Táblázat



9-17. ábra.

jelöltük a trapéz-leírás (σ_u -tól függetlennek tekintett) jósági indexeit is (vízszintes egyenesek). A metszéspontok adják σ_u határértékeit; ezeket eredményvonallal is összekötöttük.

Láthatóan a jósági index romlása a bemeneti közelítés miatt igen jelentős lehet már nem túl nagy bemenő-jel amplitudó (szórás) mellett is. Ezért általában a trapéz-közelítés alkalmazása vezet kedvezőbb eredményre. Hangsúlyozni kell azonban, hogy a választás nagy mértékben függ a bemenő-jel tulajdonságaitól és a mintavételi gyakoriságtól.

9.7. Vizsgálatok rendszerzajjal

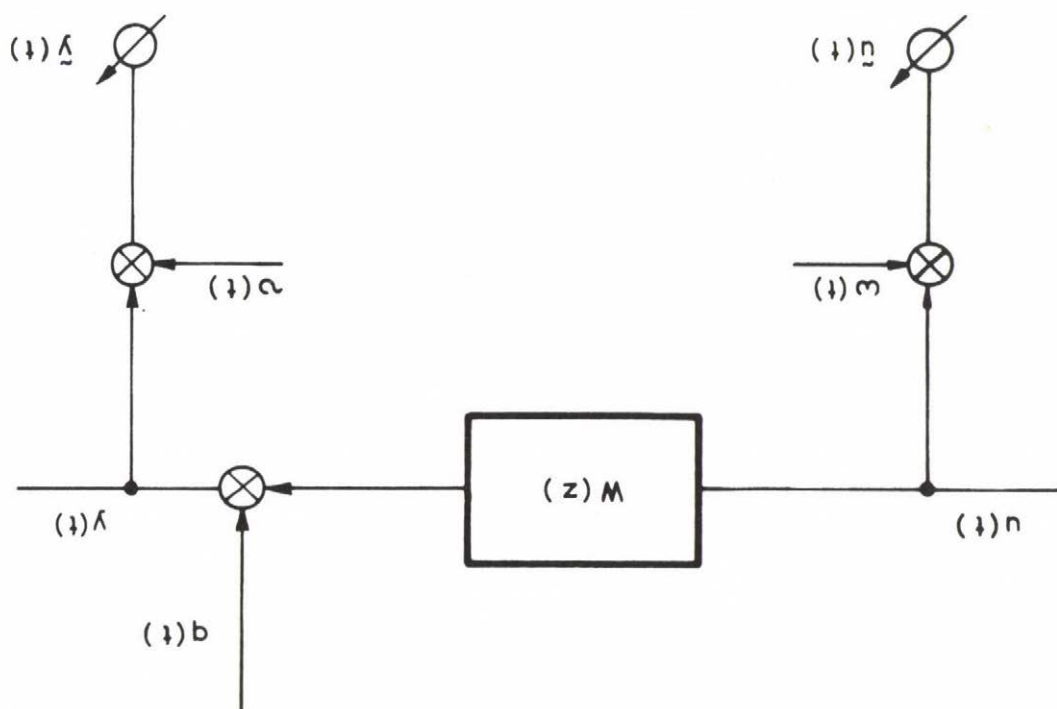
A 8. Fejezet megállapításainak szemléltetésére vizsgálatokat végeztünk az egy-bemenet egy-kimenetű elsőrendű rendszerrel a kimenetén rendszerzajjal (9-18. ábra). A rendszerzaj időben korrelálatlan, a mérési zajokkal együttes korrelációs mátrixa $\underline{P}_\phi = \underline{I}$. Az alkalmazott szűrő a (8-26.) és (8-27.) összefüggések szerint tervezett szuboptimális szűrő volt.

A 9-12. Táblázat mutatja az R_ϕ és Q_ϕ jósági indexek szimulációval nyert értékeit $\Delta t/T$ függvényében, $c=1$ és $c=10$ mellett téglalap- és trapéz-közelítéssel. Mivel most $m=1$ és $k=2$ (formálisan a rendszerzaj is bemenő-jel), láthatóan $Q_\phi = R_\phi + 1$. Egyébként a jósági indexek lefutása hasonló a rendszerzaj nélküli esetekhez.

A Q_ϕ jósági index tartalmazza a rendszerzaj $E\{[\hat{q}(t) - q(t)]^2\}$ becslési hibáját is. Ezt a 9-12. Táblázatban külön feltüntettük. A $Q_\phi - E\{(\hat{q} - q)^2\}$ különbség mutatja a valódi be- és kimenő-jel együttes becslési hibáját; ezt a rendszerzaj nélküli eset megfelelő Q értékeihez (9-2. Táblázat) hasonlítva értékelhetjük a szűrés romlását a rendszerzaj következtében.

9.8. Motor-generátor egység

Vizsgálatokat végeztünk a szűrő viselkedését illetően a 9-19. ábrán látható egyenáramú motor-szinkron generátor egységgel mint megfigyelt folyamattal. A folyamat bemenő-jelei rendre az egyenáramú motor U_a armatura-feszültsége és a szinkron generá-



9-18. dbra.

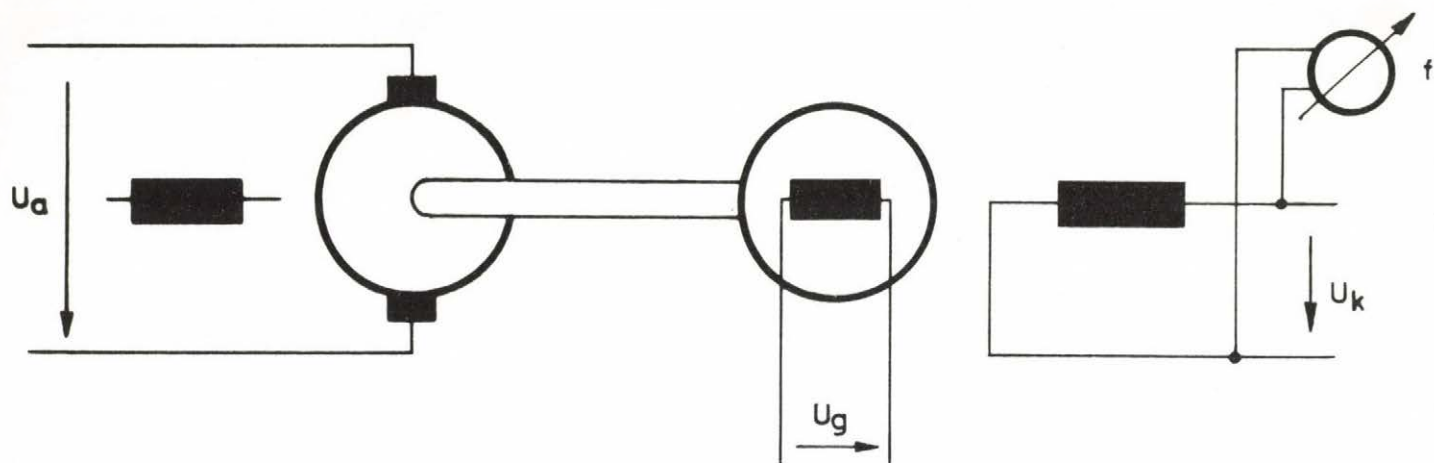
		Téglalap-közelítés			Trapéz-közelítés		
c	$\frac{\Delta t}{T}$	R_ϕ	Q_ϕ	$E\{(\hat{q}-q)^2\}$	R_ϕ	Q_ϕ	$E\{(\hat{q}-q)^2\}$
1	0,01	1,0006	2,0021	0,5001	1,0005	2,0021	0,5001
	0,02	1,0025	2,0039	0,5011	1,0025	2,0040	0,5011
	0,05	1,0077	2,0088	0,5044	1,0082	2,0093	0,5042
	0,10	1,0137	2,0149	0,5100	1,0159	2,0168	0,5095
	0,20	1,0235	2,0236	0,5213	1,0315	2,0301	0,5198
	0,50	1,0354	2,0315	0,5506	1,0700	2,0592	0,5433
	1,00	1,0233	2,0200	0,5888	1,0887	2,0728	0,5653
	2,00	1,0050	2,0042	0,6355	1,0650	2,0523	0,5879
	5,00	1,0003	2,0006	0,6652	1,0157	2,0120	0,6227
	10,00	1,0003	2,0006	0,6668	1,0042	2,0032	0,6434
10	0,01	1,0916	2,0964	0,5458	1,1027	2,1085	0,5498
	0,02	1,1667	2,1695	0,5896	1,2235	2,2270	0,6114
	0,05	1,2149	2,2289	0,6541	1,3760	2,3839	0,7021
	0,10	1,2203	2,2418	0,7295	1,5167	2,5246	0,7861
	0,20	1,1371	2,1641	0,8280	1,6595	2,6642	0,8570
	0,50	1,0202	2,0372	0,9407	1,5581	2,5769	0,9034
	1,00	0,9994	2,0062	0,9753	1,1989	2,2178	0,9363
	2,00	0,9992	2,0005	0,9868	1,0223	2,0333	0,9683
	5,00	1,0008	2,0000	0,9901	0,9989	2,0019	0,9844
	10,00	1,0009	2,0000	0,9902	0,9995	2,0003	0,9878

$$W(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

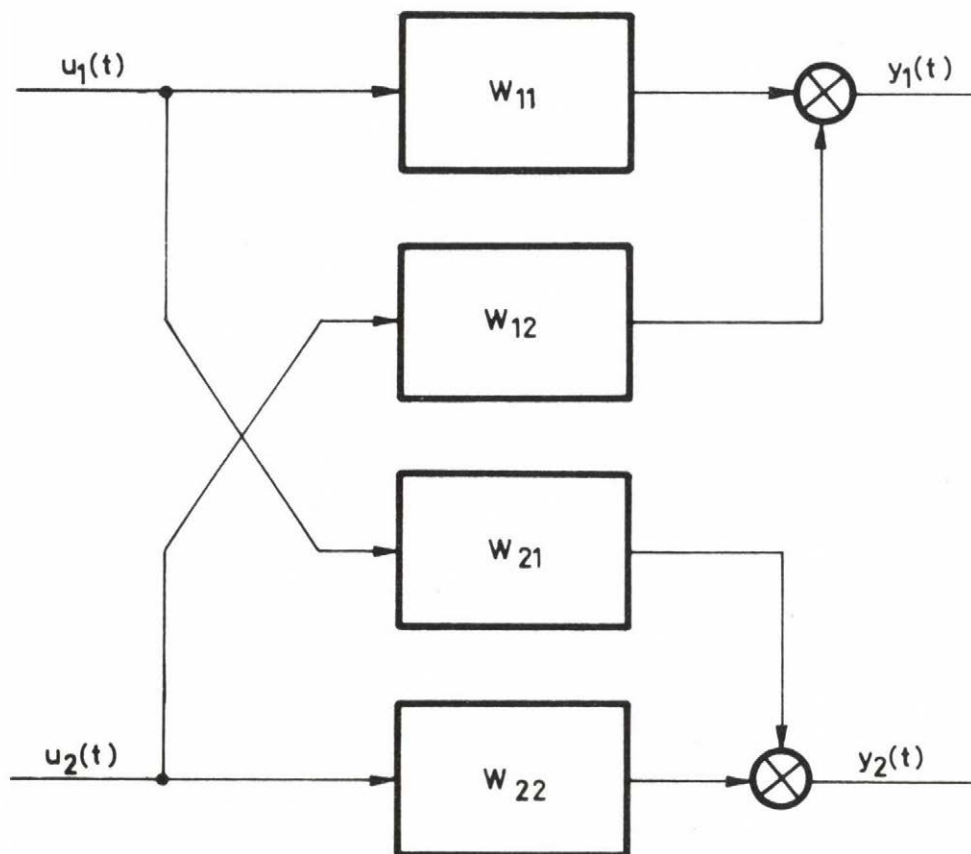
Rendszerzaj a kimeneten / Szuboptimális szűrő

Szimulációs eredmények

9-12. Táblázat



9 - 19. ábra.



9 - 20. ábra.

tor U_g gerjesztő-feszültsége ($u_1=U_a$, $u_2=U_g$), kimenő-jelei pedig a váltakozó feszültség f frekvenciája és U_k feszültsége ($y_1=f$, $y_2=U_k$). Mindkét bemenő-jel hat mindkét kimenő-jelre. Az egyes változók névleges munkaponti értékei: $U_a=70V$, $U_g=70V$, $f=50$ l/s, $U_k=200V$. A rendszert a frekvencia és feszültség együttes szabályozása szempontjából korábban Braun Péter elemezte [C1].

A rendszer tömbvázlatát a 9-20. ábra mutatja. Eszerint annak folytonos leírása

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (9-16.)$$

alaku, ahol az egyes skalár átviteli függvények az alábbiak:

$$W_{11}(s) = \frac{2,9225}{(1 + 0,77s)(1 + 1,2525s)} \left[\frac{1}{Vs} \right] \quad (9-17.)$$

$$W_{12}(s) = \frac{-1,6484}{(1 + 0,16s)(1 + 1,2525s)} \left[\frac{1}{Vs} \right] \quad (9-18.)$$

$$W_{21}(s) = \frac{0,2046}{(1 + 0,77s)(1 + 1,2525s)} \left[\frac{V}{V} \right] \quad (9-19.)$$

$$W_{22}(s) = \frac{19,1454(1 + 1,26s)}{(1 + 0,16s)(1 + 1,2525s)} \left[\frac{V}{V} \right] \quad (9-20.)$$

Láthatóan a rendszernek három különböző pólusa van, vagyis harmadrendű.

A rendszer folytonos-diszkrét reprezentációját $\Delta t=0,1s$ és $\Delta t=0,5s$ mintavételi intervallumok mellett mind téglalap- mind trapéz-közelítéssel elkészítettük. E négy esetre vonatkozóan a K_0 , K_1 , K_2 és K_3 mátrixokat a 9-13. Táblázat mutatja. (A K_i mátrixok egyes elemeinek mértékegységei különbözőek, ezeket nem tüntettük fel.)

A mérési zajok kovariancia-mátrixát - azok fizikai mérése hiányában - minőségi megfontolások alapján becsültük. Feltételeztük, hogy a mérési zajok szórása (a P_ξ mátrix főátlós elemeinek

Δt		Téglalap-közelítés				Trapéz-közelítés			
0,1 s	K_0	0,0141	-0,0328	-1,0000	0	0,0047	-0,0116	-1,0000	0
		0,0010	8,9487	0	-1,0000	0,0003	4,9382	0	-1,0000
	K_1	0,0056	0,0029	2,3367	0	0,0158	-0,0289	2,3367	0
		0,0004	-16,1248	0	2,3367	0,0011	-4,8873	0	2,3367
0,5 s	K_2	-0,0071	0,0228	-1,7751	0	-0,0055	0,0262	-1,7751	0
		-0,0005	7,2592	0	-1,7751	-0,0004	-3,2212	0	-1,7751
	K_3	0	0	0,4340	0	-0,0023	0,0071	0,4340	0
		0	0	0	0,4340	-0,0002	3,2536	0	0,4340
0,5 s	K_0	0,2695	-0,3912	-1,0000	0	0,0979	-0,1641	-1,0000	0
		0,0189	18,3863	0	-1,0000	0,0069	13,3561	0	-1,0000
	K_1	0,1781	0,0768	1,2372	0	0,2993	0,2392	1,2372	0
		0,0125	-21,9667	0	1,2372	0,0210	-10,9215	0	1,2372
0,5 s	K_2	-0,0084	0,0666	-0,4029	0	0,0446	0,1401	-0,4029	0
		-0,0006	6,4577	0	-0,4029	0,0031	-1,3268	0	-0,4029
	K_3	0	0	0,0154	0	-0,0026	0,0155	0,0154	0
		0	0	0	0,0154	-0,0002	1,7695	0	0,0154

9-13. Táblázat

négyzetgyöke) a mért mennyiség névleges értékének 1%-a feszültség-mérés esetén illetve 2%-a frekvencia-mérés esetén. A kereszt-hatásokat - további információ hiányában - zérusnak tekintettük. Így a mérési zajok kovariancia-mátrixa

$$\underline{P}_{\xi} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (9-21.)$$

A fenti kovariancia-mátrixon kívül - összehasonlítás céljából - a vizsgálatokat a $\underline{P}_{\xi} = \underline{I}$ esetre is elvégeztük.

Az előzőekben definiált összesen 8 rendszer mindegyikére numerikusan meghatároztuk az optimális szűrőt és kiszámítottuk a jósági indexet az optimális, szuboptimális és triviális helyen. A triviális és szuboptimális jósági indexeket szimulációval is ellenőriztük. Az eredményeket a 9-14. Táblázatban foglaltuk össze (a szimulációból származókat zárójelben tüntettük fel). A 9-15. Táblázatban a 8 eset szuboptimális és optimális szűrő-mátrixait is bemutatjuk.

Az eredmények jellegükben megegyeznek azokkal, amelyeket mesterséges mintarendszerek kapcsán az eddigiekben nyertünk. A szuboptimális és optimális jósági indexek viszonylag kevésbé térnek el a $k=2$ alsó korláttól. A téglalap-leírás ideális jósági indexei (a bemeneti közelítés hatásának figyelembevétele nélkül) valamelyest kedvezőbbek a trapéz-leírás ideális indexeinél.

Amint látható mind a jósági indexekből, mind pedig az \underline{A} szűrő-mátrixokból, a szuboptimális megoldás igen közel van az optimálishoz. Ez különösen szembeötlő $\Delta t=0,1s$ mellett. (Meggjegyzendő, hogy az \underline{A}_S és \underline{A}_C mátrixok elemeinek további jegyeiben akkor is lehet némi eltérés, ha a táblázatban közölt első négy jegy megegyezik.)

A $\Delta t=0,1s$ mintavételi intervallumhoz tartozó optimális (szuboptimális) jósági indexek nem lényegesen kedvezőbbek a $\Delta t=0,5s$ -hoz tartozó értékeknél. Ezért a jósági index csökkenése nem indokolja az ötször sűrűbb mintavételezést.

$\Delta t=0,1s$ esetén a szuboptimális szűrő igen közel van a stabilitás határához (bár nem instabil), ami szintén túl gyakori mintavételezésre utal. Ennek következtében olyan numerikus hibák léptek fel, amelyek kétszeres pontosságú numerikus számításokat tet-

	Δt		$Q(\underline{A}_T)$		$Q(\underline{A}_S)$		$Q(\underline{A}_C)$	
$P_{\Xi} = I$	0,1	Tégla	(108,5392)	114,4867	(2,1758)	2,2058	2,2049	Dupla pontosság
		Trapéz	(82,0996)	79,1748	(2,3526)	2,3822	2,3404	
	0,5	Tégla	(340,8548)	344,2258	(2,5237)	2,5304	2,4884	
		Trapéz	(206,5520)	214,5790	(2,7839)	2,8001	2,6631	
$P_{\Xi} < 0,5; 0,5; 1; 4 >$	0,1	Tégla	(15,4078)	16,2026	(2,1114)	2,1267	2,1259	Dupla pontosság
		Trapéz	(12,1027)	12,9765	(2,5613)	INSTAB [*]	2,6804 [*]	Dupla pontosság
	0,5	Tégla	(44,8855)	45,3393	(2,3359)	2,3443	2,3238	
		Trapéz	(28,0832)	29,1192	(2,4455)	2,4587	2,4106	

* Korlátozott numerikus pontosság

Numerikus (és szimulációs) eredmények

9-14. Táblázat

		Téglalap-közelítés				Trapéz-közelítés			
		$\underline{\underline{A}}_S$		$\underline{\underline{A}}_C$		$\underline{\underline{A}}_S$		$\underline{\underline{A}}_C$	
$P_{\xi} = I$	$\Delta t = 0,1s$	0,0141	0,0001	0,0141	0,0001	0,0047	0,0000	0,0047	0,0000
		-0,0004	0,1104	0,0004	0,1102	-0,0005	0,1945	-0,0005	0,1945
		-0,9998	-0,0036	-0,9998	-0,0036	-1,0000	-0,0023	-1,0000	-0,0022
		-0,0036	-0,0124	-0,0036	-0,0123	-0,0022	-0,0394	-0,0023	-0,0395
	$\Delta t = 0,5s$	0,2515	0,0054	0,3709	0,0079	0,0970	0,0012	0,2882	0,0036
		-0,0013	0,0542	-0,0017	0,0540	-0,0010	0,0744	-0,0017	0,0743
		-0,9317	-0,0198	-0,8994	-0,0190	-0,9904	-0,0121	-0,9715	-0,0118
		-0,0198	-0,0034	-0,0235	-0,0034	-0,0121	-0,0057	-0,0207	-0,0058
$P_{\xi} = <0,5;0,5;1;4>$	$\Delta t = 0,1s$	0,0071	0,0000	0,0071	0,0000	0,0024	0,0000	0,0001*	0,0000*
		-0,0015	0,1016	-0,0015	0,1015	-0,0014	0,1525	0,0000*	0,1218*
		-0,9998	-0,0033	-0,9998	-0,0033	-1,0000	-0,0018	-1,0000*	-0,0014*
		-0,0133	-0,0909	-0,0133	-0,0906	-0,0071	-0,2470	0,0000*	-0,3988*
	$\Delta t = 0,5s$	0,1300	0,0028	0,1987	0,0042	0,0487	0,0006	0,1465	0,0018
		-0,0045	0,0530	-0,0054	0,0529	-0,0035	0,0716	-0,0058	0,0714
		-0,9632	-0,0200	-0,9443	-0,0196	-0,9947	-0,0117	-0,9847	-0,0115
		-0,0800	-0,0248	-0,0963	-0,0250	-0,0468	-0,0435	-0,0762	-0,0437

* Korlátozott numerikus pontosság

9-15. Táblázat

tek szükségessé (lásd a 9-14. Táblázatot). $\underline{P}_{\xi} \neq \underline{I}$ és téglalapközelítés esetén még ez sem volt teljesen elegendő: a numerikus program a valójában stabil szuboptimális megoldást instabilnak találta. Ennek ellenére - a triviális megoldásból kiindulva - eljutott az optimum közelébe, ami jól demonstrálja az eljárás robusztusságát. (A 9-15. Táblázatban erre az esetre nézve az ehhez a korlátozott pontosságú numerikus optimumhoz tartozó \underline{A}_C mátrixot tüntettük fel.)

A triviális megoldáshoz tartozó jósági indexek meglehetősen magasak, ami a folyamat viszonylag nagy statikus erősítéséből következik (különösen a W_{22} tagban). A $\underline{P}_{\xi} \neq \underline{I}$ esetben ez a hatás mérsékeltebb, mivel most a bemeneti zaj szórása kisebb, a kimeneti zaj szórása pedig nagyobb mint $\underline{P}_{\xi} = \underline{I}$ mellett (v.ö. a (4-56.) egyenlettel). $Q(\underline{A}_T)$ magas értékei egyébként még jobban kiemelik az optimális (szuboptimális) szűrés hatékonyságát.

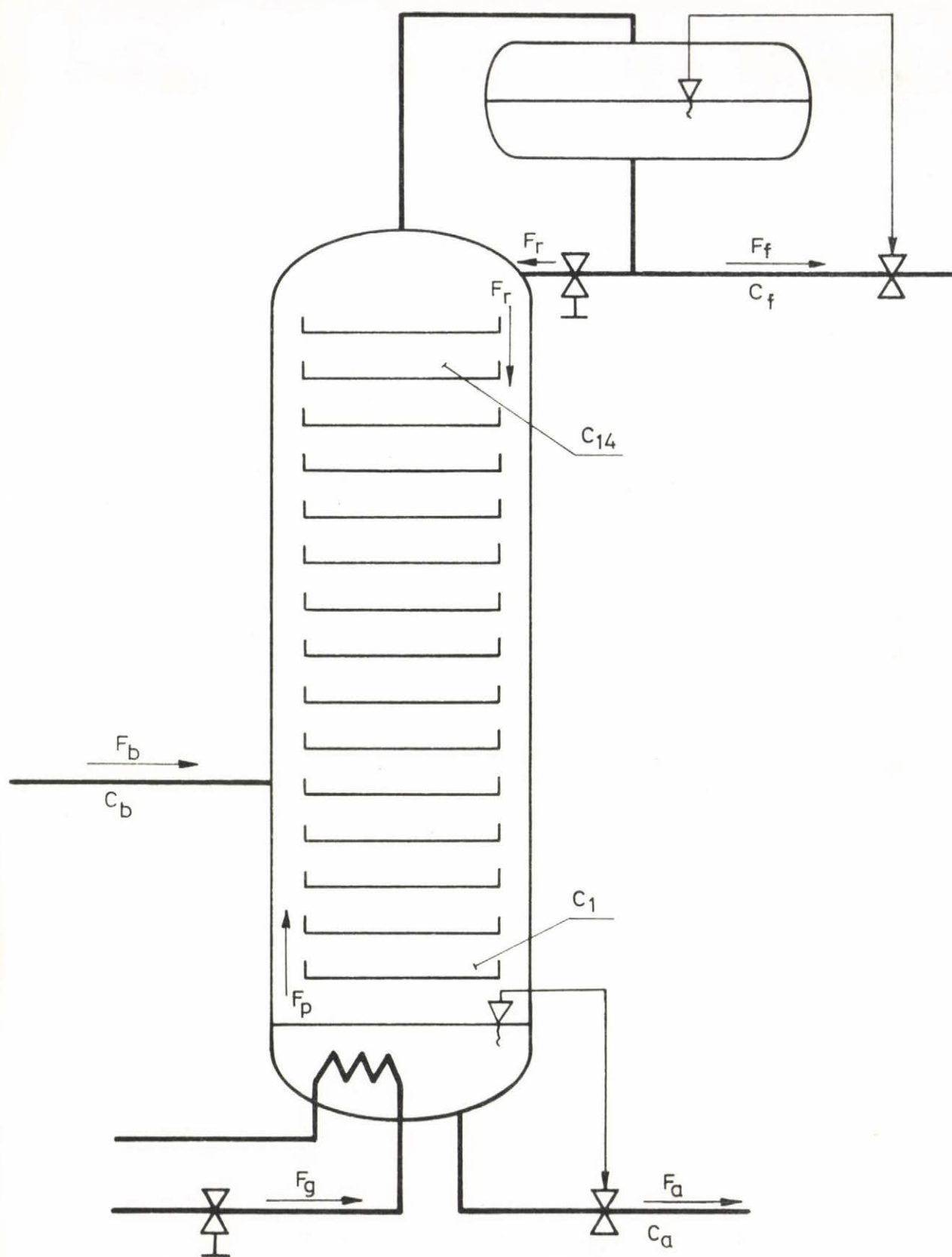
A numerikus optimalizálás az egyes feladatokban $50 \div 300$ elemi keresési lépést tartalmazott. Ehhez egyszeres pontossággal $2 \div 8$ perc gépidő volt szükséges. Kétszeres pontosság mellett csak $50 \div 100$ elemi lépésre vonatkozóan van adat (kis Δt esetén - amikor kétszeres pontosság szükséges - a szuboptimális és optimális megoldások igen közel esnek egymáshoz); ennek gépidő-szükséglete $12 \div 20$ perc volt.

9.9. Desztillációs oszlop

További vizsgálatokra került sor egy desztillációs oszlop modelljének felhasználásával. A berendezés a Case Western Reserve University (Cleveland, Ohio) rendszertехnikai tanszékének laboratóriumában működik.

Az oszlop vázlatos rajzát a 9-21. ábra mutatja. A tálcák száma 15. A berendezés atmoszférikus nyomáson üzemel. A belépő anyag víz és metil-celluszolv keveréke; a víz a könnyebb komponens. (A továbbiakban az anyagösszetételt a könnyebb komponens koncentrációjával fogjuk jellemezni.)

A belépő áram tulajdonságai (az F_b anyagáram, a C_b koncentráció és a hőállapot) adóttak. Két helyen lehet beavatkozni



9-21. ábra.

az oszlop működésébe: az újrahevitő fűtőgőzének fojtásával, ami az F_g gőzáramon keresztül az F_p elpárologtatott anyagáramot befolyásolja, illetve az F_r recirkuláltatott anyagáram beállításával. A fentiek együttesen meghatározzák az alsó és felső kilépések F_a és F_f anyagáramát (szintszabályozás útján), valamint a kilépések C_a és C_f koncentrációját. Ugyiszintén meghatározott az egyes tálcák $C_1 \dots C_{15}$ folyadék-koncentrációja és $C'_1 \dots C'_{15}$ gőz-koncentrációja.

Vizsgálatainkban az F_p és F_r anyagáramokat tekintettük bemenő változóknak ($u_1 = F_p$, $u_2 = F_r$). Kimenő változókul az 1. és 14. tálca (ezekre volt mérés kiépitve a kísérleti berendezésen) C_1 illetve C_{14} folyadék-koncentrációját választottuk ($y_1 = C_1$, $y_2 = C_{14}$).

A berendezés állandósult állapotában az egyes változókra mért névleges (munkaponti) értékek az alábbiak voltak:

$F_b = 0,0170$ mol/min	$C_b = 0,285$ mol/mol
$F_p = 0,0221$ mol/min	$C_1 = 0,061$ mol/mol
$F_r = 0,0111$ mol/min	$C_{14} = 0,889$ mol/mol
$F_a = 0,0122$ mol/min	$C_a = 0,023$ mol/mol
$F_f = 0,0048$ mol/min	$C_f = 0,958$ mol/mol

A rendszer dinamikus modelljének identifikációjához szükséges mérésekre - műszerezési nehézségek miatt - nem volt lehetőség. Ezért számítógépre elkészítettük a berendezés részletes dinamikus matematikai modelljét (ez 17-edrendű és nemlineáris), majd ehhez illesztettünk - szimuláció segítségével - közelítő diszkrét lineáris dinamikus modellt.

A részletes dinamikus modellt először illesztettük az állandósult állapotra vonatkozó mérési eredményekhez. Ezután - tájékozódás céljából - szimulációval felvettük a rendszer átmeneti függvényeit. Végül ál-véletlen bemenő-jelekkel szimulált adatrendszerket generáltunk és ezekre a legkisebb négyzetek módszerén alapuló diszkrét identifikációs programot alkalmaztunk.

A legkisebb rendszámú, még elfogadható közelítő lineáris dinamikus modell összesen negyedrendű volt. Ennek összetevői $\Delta t = 6$ min mintavételi intervallum mellett az alábbiak:

$$W_{11}(z) = \frac{-0,36z^{-1}}{1 - 0,39z^{-1}} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-22.)$$

$$W_{12}(z) = \frac{0,32z^{-1}}{1 - 0,81z^{-1}} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-23.)$$

$$W_{21}(z) = \frac{-0,64z^{-1} - 0,69z^{-2}}{1 - 1,13z^{-1} + 0,33z^{-2}} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-24.)$$

$$W_{22}(z) = \frac{0,072z^{-1} + 0,095z^{-2}}{1 - 1,13z^{-1} + 0,33z^{-2}} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-25.)$$

Ezek a diszkrét átviteli függvények téglalap-közelítésnek felelnek meg Δt holtidővel (a holtidős reprezentáció a felhasznált identifikációs algoritmus sajátága).

Bár a modell-illesztés a rendszer átviteli függvényeinek rögtön a diszkrét változatát adta meg, érdemes felírni a megfelelő folytonos átviteli függvényeket is. Ezek rendre

$$W_{11}(s) = \frac{-0,59}{1 + 6,37s} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-26.)$$

$$W_{12}(s) = \frac{1,68}{1 + 28,47s} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-27.)$$

$$W_{21}(s) = \frac{-6,65 + 4,46s}{1 + 19,53s + 105,71s^2} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-28.)$$

$$W_{22}(s) = \frac{0,835 - 0,814s}{1 + 19,53s + 105,71s^2} \left[\frac{\text{min}}{\text{mol}} \right] \quad (9-29.)$$

Az egyes tagok statikus erősítési tényezői és időállandói ez utóbbi formulákból kiolvashatók. Az időállandók percben vannak kifejezve. A két elsőrendű tag időállandói láthatóan $T=6,37$ min és $T=28,47$ min. A másodrendű tagok együttes nevezőjének $1+2\zeta Ts+T^2s^2$ alakjában az időállandó $T=10,28$ min, a csillapítási tényező pedig $\zeta=0,95$. A másodrendű tagok pólusai $\alpha \pm j\beta = -0,0924 \pm j0,0303$ (dimenziójuk $1/\text{min}$), így a valós rész negatív reciproka (ami szintén időállandó jellegű mennyiség) $-1/\alpha=10,82$ min, a lengések periódusideje pedig $2\pi/\beta=207,36$ min. A másodrendű tagok tehát lengőek ugyan, de a lengések erősen csillapítottak.

A rendszer $\underline{K}_0, \dots, \underline{K}_4$ mátrixait a (9-22.)-(9-25.) diszkrét átviteli függvények alapján - közös nevezőre hozással - irtuk fel. Miután a reprezentáció holtidős (mindkét bemeneten vagy mindkét kimeneten Δt holtidő van), a \underline{K}_i mátrixokon holtidő-transzformációt hajtottunk végre (lásd 7.Fejezet). A transzformált \underline{K}_i^x mátrixokat a 9-16.Táblázatban mutatjuk be.

A \underline{K}_i^x mátrixok alapján és $\underline{P}_\xi = \underline{I}$ zajmátrixszal megterveztuk és elemeztük a rendszert kiszolgáló szűrőt. A szuboptimális és optimális szűrő-mátrixot szintén feltüntettük a 9-16. Táblázatban. A jósági index numerikusan nyert értékei az alábbiak:

$$Q(\underline{A}_T) = 9,0756 \qquad Q(\underline{A}_S) = 3,1979 \qquad Q(\underline{A}_C) = 3,1727$$

Láthatóan a szuboptimális szűrés alig különbözik az optimális-tól, e kettő azonban lényegesen jobb a triviálisnál. (A numerikus optimalizálás 105 elemi keresési lépést tartalmazott és - szimpla pontossággal - 4,5 perc gépidőt vett igénybe.)

A szuboptimális és triviális szűrőt szimuláltuk is a szokásos módon - a (9-22.)-(9-25.) közelítő lineáris rendszermodell felhasználásával - és a következő eredményeket kaptuk:

$$\begin{aligned} Q(\underline{A}_T) &= 8,9166 & Q(\underline{A}_S) &= 3,1425 \\ R(\underline{A}_T) &= 9,0698 & R(\underline{A}_S) &= 3,2308 \end{aligned}$$

Láthatóan az egyezés a numerikus eredményekkel kielégítő.

A szuboptimális megoldást megvizsgáltuk úgy is, hogy a folyamatot annak részletes matematikai modelljével szimuláltuk. A kapott jósági index

$$Q(\underline{A}_S) = 3,23$$

volt. Ez az érték igen közel van az egyszerűsített lineáris modellel nyert eredményhez, ami azt a rendkívül fontos tényt mutatja, hogy a jósági index nem romlott számottevően a közelítés következtében. (Megjegyzendő, hogy itt voltaképpen a valódi rendszer-paramétereket variáltuk, ezért a jósági index megváltozása részben az új szituációból, részben annak pontatlan leírásából fakad - lásd a 6.2.alfejezetet. Másrészt a két kísérlet nem tel-

$$\underline{K}_0^x = \begin{bmatrix} -0,35626 & 0,32334 & -1,00000 & 0 \\ -0,64294 & 0,07246 & 0 & -1,00000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_1^x = \begin{bmatrix} 0,69123 & -0,48884 & 2,32598 & 0 \\ 0,07858 & 0,00835 & 0 & 2,32598 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2^x = \begin{bmatrix} -0,44354 & 0,24657 & -1,99342 & 0 \\ 0,62945 & -0,09159 & 0 & -1,99342 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_3^x = \begin{bmatrix} 0,09519 & -0,04093 & 0,74744 & 0 \\ -0,21507 & 0,02993 & 0 & 0,74744 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_4^x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,10307 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,10307 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_S = \begin{bmatrix} -0,20381 & -0,41694 \\ 0,26164 & 0,00451 \\ -0,84279 & 0,15000 \\ 0,15000 & -0,73161 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_C = \begin{bmatrix} -0,20153 & -0,47114 \\ 0,26114 & 0,00451 \\ -0,84376 & 0,16931 \\ 0,14849 & -0,69676 \end{bmatrix}$$

jesen azonos körülmények között - más gépen, más zajforrással és szimulációs programmal - folyt, ezért az eredmények szigorú számszerű összehasonlítása nem lehetséges.)

A folyamat részletes matematikai modelljének felhasználásával további érzékenységi vizsgálatokat is végeztünk. Ezek során variáltuk az F_b belépő anyagáramot munkaponti értékéhez képest $\pm 15\%$ -os tartományban, ugyanakkor változatlanul hagytuk a szűrő-mátrixot. Nyilvánvalóan a munkapont változtatásával a szűrő-tervezés alapjául szolgáló közelítő modell pontossága romlik. A nyert eredményeket a 9-22. ábra mutatja. Láthatóan a jósági index megváltozása elviselhető (és az érzékenységi vizsgálatokból ismert szimmetrikus kvadratikus jellegű).

Végezetül a folyamat közelítő lineáris modellje - illetve annak egy minimális állapotterezes realizációja - alapján stacionárius Kalman-szűrőt is terveztünk. Ezzel szintén szimulációs kísérleteket végeztünk és megállapítottuk a \underline{Q} jósági indexet; ez $Q(\underline{A}_K) = 3,62$ volt. Ennek a többi eredménnyel való egybevetéséből azonban voltaképpen semmilyen következtetés nem vonható le, mivel a Kalman-szűrő egyrészt - természetesen - a saját jósági indexére optimális, másrészt nem becsüli a bemenő változókat és a becslései nem elégítik ki a rendszer-egyenleteket.

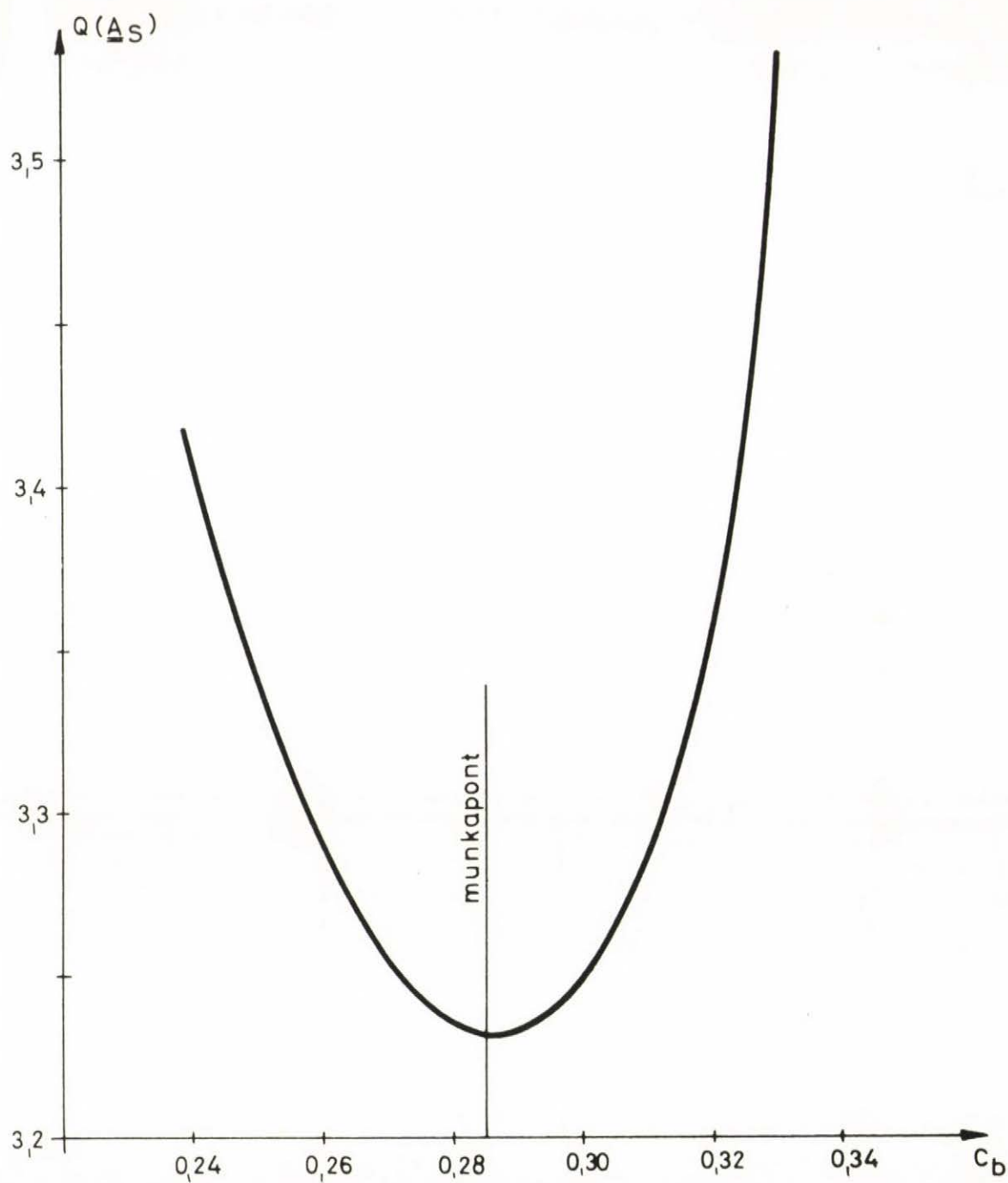
A desztillációs oszlop modellezése és a részletes matematikai modellel folytatott szűrő-vizsgálatok Raghuvansh Prasad Singh munkája volt a Case Western Reserve University-n [C8].

9.10. Ammónia-szintézis reaktor

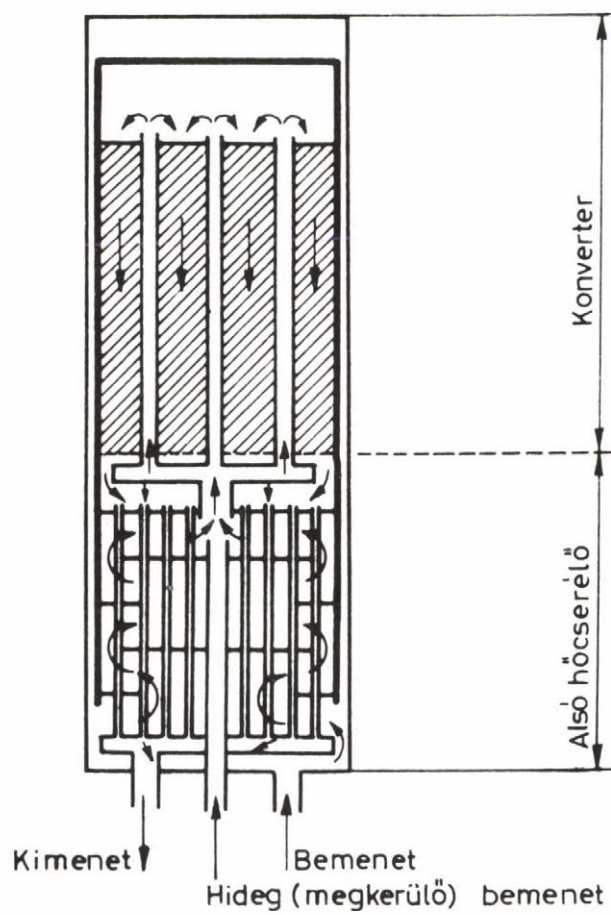
A Péti Nitrogénművek 420 t/nap névleges kapacitású ammónia-szintézis reaktorának modelljével is vizsgáltuk a szűrőt. E folyamat modellezése Pavel Simko munkája volt [C9, C10].

A reaktor szerkezeti vázlatát a 9-23. ábrán mutatjuk be. A reaktor funkcionálisan két részre osztható: az ún. alsó hőcserélőre és a konverterre (a tulajdonképpeni reakció ez utóbbiban megy végbe).

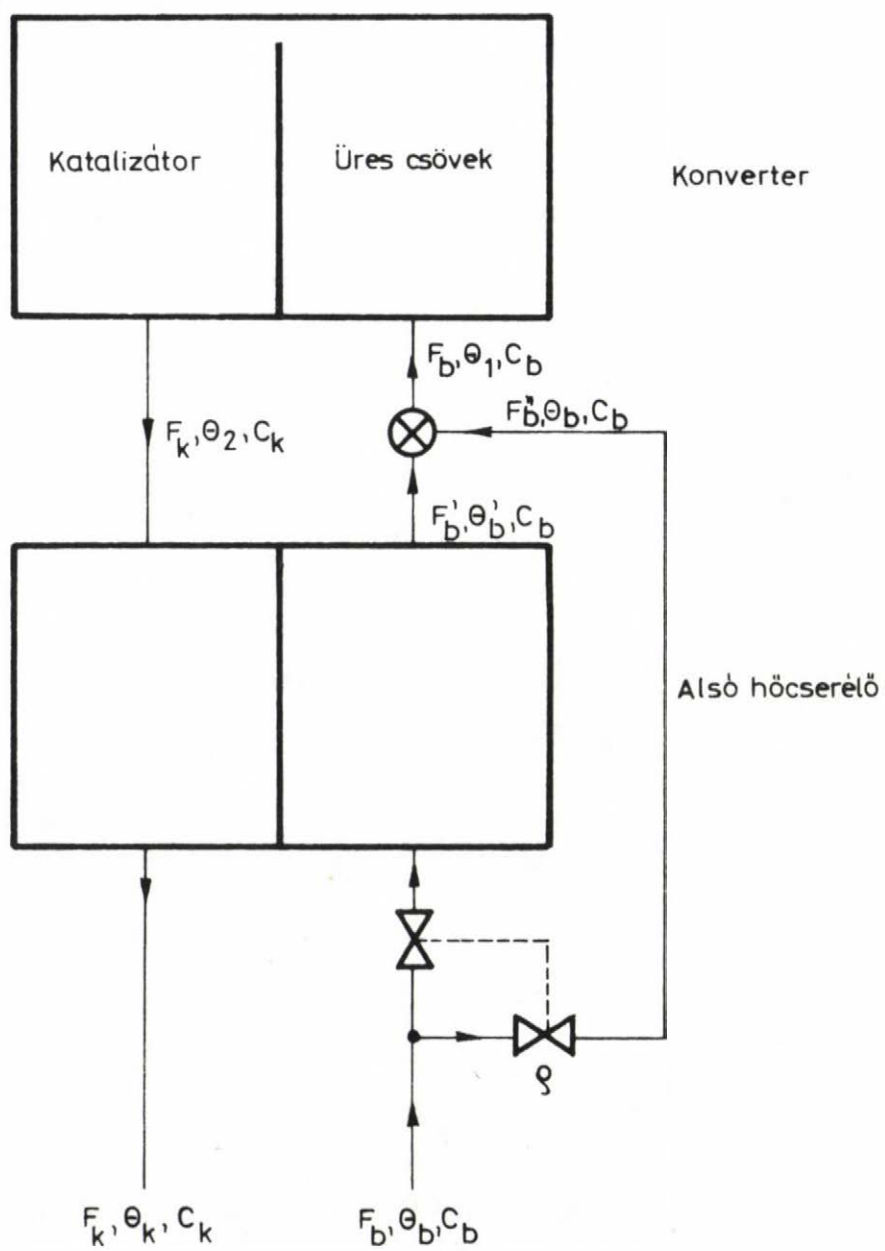
A berendezés működési vázlatát a 9-24. ábra szemlélteti. A belépő illetve kilépő áramokat a következő változók jellemzik:



9-22. ábra.



9-23. ábra.



9-24. ábra.

az anyagáram, a nyomás, a hőmérséklet és az összetétel. A be- illetve kilépő gázok ammónia, hidrogén, nitrogén és inert (metán) elegyei; miután a hidrogén/nitrogén arány és az inert-hányad szigorúan szabályozott, a gázelegy összetétele az ammónia-koncentrációval jellemezhető. Az ábrán θ jelöli a hőmérsékleteket, C a koncentrációkat és F az anyagáramokat; a nyomást nem tüntettük fel.

Az egyetlen beavatkozási lehetőség a reaktoron a megkerülő szelep ρ pozíciója. A megkerülő szelep a főági szeleppel összehangolva úgy működik, hogy az F_b'' megkerülő gázáram és az alsó hőcserélőn áthaladó F_b' gázáram aránya ρ -tól függően változik, miközben összegük állandó. Így ρ -val a konverterbe belépő θ_1 hőmérséklet befolyásolható. A megkerülő szelepre olyan szabályozó hat, amely biztosítja a θ_1 hőmérséklet θ_{10} munkaponti értéken tartását, az ehhez szükséges - és a zavarásoktól függően változó - mindenkor ρ_0 érték beállításával.

Mindezek után a rendszer egyik bemenő változójául a ρ - ρ_0 pozíció eltérést illetve az ezzel egyenértékű θ_1 konverter belépő hőmérsékletet (pontosabban annak eltérését a θ_{10} munkaponti értéktől) választottuk. Másik bemenő-változó a C_b belépő koncentráció ($u_1 = \theta_1$, $u_2 = C_b$). Az F anyagáramot és a θ_b belépő hőmérsékletet állandónak tekintettük. Kimenő változókként természetes választás a kilépő áram θ_k hőmérséklete és C_k koncentrációja ($y_1 = \theta_k$, $y_2 = C_k$).

A rendszer jellemző munkaponti értékei üzemi mérések alapján a következők:

$F_b = 250\ 000\ \text{Nm}^3/\text{h}$	$\theta_b = 155\ \text{C}^\circ$	$C_b = 5,12\ \text{mol}\%$
$F_b' = 160\ 000\ \text{Nm}^3/\text{h}$	$\theta_1 = 313,6\ \text{C}^\circ$	
	$\theta_2 = 494,2\ \text{C}^\circ$	
$F_k = 223\ 681\ \text{Nm}^3/\text{h}$	$\theta_k = 316,7\ \text{C}^\circ$	$C_k = 17,48\ \text{mol}\%$

nyomás a belépésnél: 336 atm

Miután a dinamikus identifikációhoz szükséges mérésekre itt sem volt lehetőség, hasonló módon jártunk el, mint a desztillációs

oszlop esetében. Elkészítettük, számítógépen programoztuk és a statikus mérési adatokhoz illesztettük a reaktor részletes dinamikus matematikai modelljét. Ez a modell elosztott paraméterű és nemlineáris. A modellel generált szimulációs adatokra aztán - a legkisebb négyzetek módszerén alapuló identifikációs program segítségével - közelítő koncentrált paraméterű lineáris diszkrét modellt illesztettünk.

A legkisebb fokszámu még elfogadható közelítő modell - $\Delta t = 0,34$ min mintavételi intervallum mellett - az alábbi volt:

$$W_{11}(z) = \frac{0,3371 - 0,2502 z^{-1} + 0,0027 z^{-2}}{1 - 1,0217 z^{-1} + 0,1337 z^{-2} + 0,0091 z^{-3}} z^{-1} [C^O/C^O] \quad (9-30.)$$

$$W_{12}(z) = \frac{0,4592 - 1,0581 z^{-1}}{1 - 1,0217 z^{-1} + 0,1337 z^{-2} + 0,0091 z^{-3}} z^{-1} [C^O/\%] \quad (9-31.)$$

$$W_{21}(z) = - \frac{0,0250 + 0,0540 z^{-1} + 0,0465 z^{-2}}{1 - 0,5145 z^{-1} + 0,2917 z^{-2} - 0,3970 z^{-3}} z^{-1} [\%/C^O] \quad (9-32.)$$

$$W_{22}(z) = \frac{-0,9530 + 1,0450 z^{-1} + 0,1605 z^{-2}}{1 - 0,5145 z^{-1} + 0,2917 z^{-2} - 0,3970 z^{-3}} z^{-1} [\%/ \%] \quad (9-33.)$$

Láthatóan a rendszer összesen hatodrendű; a leírás téglalap-közelítéses Δt holtidővel.

Az egyes tagok statikus erősítései rendre

$$\begin{aligned} W_{11}(z) \Big|_{z=1} &= 0,7401 C^O/C^O & W_{12}(z) \Big|_{z=1} &= -4,9456 C^O/\% \\ W_{21}(z) \Big|_{z=1} &= -0,3301 \%/C^O & W_{22}(z) \Big|_{z=1} &= 0,6641 \%/ \% \end{aligned}$$

A $W_{11}(z)$ és $W_{12}(z)$ tagok diszkrét pólusai

$$z_1 = 0,8523 \quad z_2 = 0,2183 \quad z_3 = -0,0489$$

A z_1 és z_2 diszkrét pólusoknak egy-egy egytárolós arányos folytonos tag felel meg $T_1 = 2,14$ min illetve $T_2 = 0,23$ min időállandóval. A z_3 diszkrét pólushoz egytárolós lengő diszkrét tag tartozik, amelynek nincs folytonos megfelelője (e tagnak formálisan létezik az időállandója és ez $T_3 = 0,11$ min). Mind a W_{11} , mind a

W_{12} átviteli függvényben a $T_1=2,14$ min időállandó a domináns (a párhuzamos felbontásban ehhez tartozik a legnagyobb erősítési tényező).

A $W_{21}(z)$ és $W_{22}(z)$ tagok diszkrét pólusai

$$z_4 = 0,768 \quad z_{5,6} = -0,1358 \pm j0,6976$$

A z_4 pólusnak egytárolós arányos folytonos tag felel meg $T_4=1,29$ min időállandóval. A $z_{5,6}$ póluspár folytonos megfelelője kéttárolós arányos lengő tag, amelynek $1 + 2\zeta Ts + T^2 s^2$ alakú nevezőjében $T=0,19$ min és $\zeta=0,18$ (folytonos pólusai $\alpha \pm j\beta = -1,00 \pm j 5,15$ l/min, így $-1/\alpha = 1,00$ min és $2\pi/\beta = 1,22$ min). Mind a W_{21} mind a W_{22} átviteli függvényben az egytárolós ($T_4=1,29$ min) tag a domináns.

A (9-30.)-(9-33.) diszkrét átviteli függvényekből kiindulva közös nevezőre hozás és holtidő transzformáció után kapjuk a rendszer $K_0^x; \dots; K_6^x$ mátrixait; ezeket a 9-17. Táblázatban soroljuk fel.

A zajok kovariancia-mátrixának megállapításakor azzal a feltevessel élünk, hogy a hőmérsékletek mérésében a kb. 300°C -os névleges értékek 0,5%-a (vagyis $1,5^\circ\text{C}$) a zaj szórása, a koncentrációk mérésében pedig a durván 20%-os maximális névleges érték 2,5%-a (vagyis 0,5%). A keresztkorrelációkat zérusnak tekintjük. Így

$$P_\xi = \langle 2,25 \quad 0,25 \quad 2,25 \quad 0,25 \rangle$$

A fentiekben definiált rendszerhez a szokásos módon megterveztük a szuboptimális és optimális szűrőt; az \underline{A}_S és \underline{A}_C mátrixokat a 9-17. Táblázat tartalmazza. Kiszámítottuk a jósági indexeket is; a numerikus eredmények:

$$Q(\underline{A}_T) = 4,4057 \quad Q(\underline{A}_S) = 3,3011 \quad Q(\underline{A}_C) = 2,8160$$

Láthatóan az optimális szűrés elég számottevő javulást hoz a szuboptimálisához képest. A triviális szűrés jósági indexe viszont - más rendszerekhez képest - csak mérsékelten haladja meg a szuboptimális szűrését.

Szimuláltuk is a szűrést a folyamat közelítő modelljének felhasználásával. A szimulációs eredmények:

$$\underline{K}_0^x = \begin{bmatrix} 0,3371 & 0,4592 & -1,0000 & 0 \\ -0,0250 & -0,9530 & 0 & -1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_1^x = \begin{bmatrix} -0,4237 & -1,2943 & 1,5362 & 0 \\ -0,0285 & 2,0187 & 0 & 1,5362 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2^x = \begin{bmatrix} 0,2298 & 0,6784 & -0,9511 & 0 \\ 0,0053 & -1,0346 & 0 & -0,9511 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_3^x = \begin{bmatrix} -0,2082 & -0,4910 & 0,7547 & 0 \\ 0,0401 & -0,0330 & 0 & 0,7547 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_4^x = \begin{bmatrix} 0,1001 & 0,4201 & -0,4399 & 0 \\ -0,0067 & 0,0310 & 0 & -0,4399 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_5^x = \begin{bmatrix} -0,0011 & 0 & 0,0504 & 0 \\ -0,0004 & 0,0015 & 0 & 0,0504 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_6^x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0036 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0036 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_S = \begin{bmatrix} 0,29453 & -0,03854 \\ 0,02016 & -0,49254 \\ -0,89146 & -0,23917 \\ -0,02657 & -0,52964 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_C = \begin{bmatrix} 0,40081 & -0,03841 \\ -0,01583 & -0,38966 \\ -0,87216 & -0,19188 \\ 0,00507 & -0,62770 \end{bmatrix}$$

$$Q(\underline{A}_{\underline{T}}) = 4,4467$$

$$Q(\underline{A}_{\underline{S}}) = 3,1790$$

$$R(\underline{A}_{\underline{T}}) = 4,4814$$

$$R(\underline{A}_{\underline{S}}) = 3,2814$$

Az egyezés a numerikus eredményekkel kielégítő.

A fenti vizsgálat leglényegesebb eredménye annak demonstrálása volt, hogy az optimális szűrőt ilyen méretű rendszerre is minden nehézség nélkül meg lehet határozni, bár a számítás időszükséglete elég jelentős. A numerikus keresés 290 elemi keresési lépést tartalmazott és ehhez - egyszeres számítási pontosság mellett - mintegy 24 perc gépidő volt szükséges.

FÜGGELÉK

1. Függelék

Folytonos-diszkrét lineáris rendszerek leírása

Folytonos-diszkrét rendszereknek nevezzük azokat a rendszereket, amelyek jelei csak meghatározott időközönként állnak rendelkezésre, a minták abszolút időzítése azonban nem korlátozott (nem diszkrét). Valamely u jel $u(t)$, $u(t-\Delta t)$, $u(t-2\Delta t)$, ... értéksorozata egy folytonos diszkrét sorozat, amennyiben a Δt mintavételi időköz kötött, a t időpont azonban tetszőleges.

Egy folytonos rendszer diszkrét leírása a folytonos-diszkrét rendszerek egyik alapesete. A folytonos rendszer folytonos jelei csak mintavételezett értéksorozatokkal állnak rendelkezésre. A rendszer diszkrét leírása e mintavételezett értéksorozatok között teremt kapcsolatot. A diszkrét leírásnak valamely folytonos rendszer-leírásból való előállítására szolgáló módszerek közismertek. Ezekre itt nem térünk ki, csak annyit jegyzünk meg, hogy a diszkrét leírás szükségszerűen valamilyen közelítésen alapszik, mivel a rendszer bemenő-jelének a mintavételek közti viselkedését a mintavételezett értéksorozat nem írja le teljesen.

Folytonos-diszkrét rendszerként fogjuk kezelni azokat a rendszereket is, amelyek működésükben diszkrétnek ugyan, de bemenő-jelük egy folytonos jel mintavételezett értéksorozata. Ilyen például egy digitális számítógépen realizált szűrő-algoritmus, amely egy folytonos rendszer változóiból vett minták alapján becsüli e változók értékeit. A szűrő-algoritmus kimenő-jelének időzítését a bemenő-jel mintavételezése határozza meg.

Tekintsünk először egy egy-bemenet egy-kimenetű lineáris folytonos-diszkrét rendszert. Az $u(t)$ bemenő-jel és $y(t)$ kimenő-jel közti összefüggés az alábbi módon írható le:

$$y(t) = \sum_{i=0}^n g_i u(t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^n h_i y(t-i\Delta t) \quad (F1-1.)$$

Itt a g_i és h_i együtthatók a rendszer-leírás paraméterei,

\underline{n} pedig a rendszer rendszáma. Definiáljuk a \underline{z} shift-operátort a szokásos módon:

$$z^{-i}u(t) = u(t-i\Delta t) \quad (F1-2.)$$

Ezzel az (F1-1.) összefüggés

$$y(t) = \sum_{i=0}^n g_i z^{-i} u(t) - \sum_{i=1}^n h_i z^{-i} y(t) \quad (F1-3.)$$

alaku lesz. Az (F1-3.) összefüggés törtfüggvény formájába is átrendezhető:

$$y(t) = \frac{\sum_{i=0}^n g_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}} u(t) = W(z)u(t) \quad (F1-4.)$$

ahol $W(z)$ a rendszer diszkrét átviteli függvénye.

Rendelkezzék most a rendszer több bemenettel és több kimenettel. Az $\underline{u}(t) = [u_1(t) \dots u_k(t)]^T$ bemenőjel vektor és az $\underline{y}(t) = [y_1(t) \dots y_m(t)]^T$ kimenőjel vektor összefüggését általában a következő formában írjuk le:

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{G}_i \underline{u}(t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^n \underline{h}_i \underline{y}(t-i\Delta t) \quad (F1-5.)$$

Az ennek megfelelő shift-operátoros, törtfüggvény-alaku leírás az alábbi:

$$\underline{y}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n \underline{h}_i z^{-i}} \underline{u}(t) = \underline{W}(z) \underline{u}(t) \quad (F1-6.)$$

ahol $\underline{W}(z)$ a rendszer diszkrét átviteli függvény mátrixa. Az (F1-5.), (F1-6.) leírás jellegzetessége, hogy míg az \underline{u} vektor együtthatói - természetesen - mátrixok, addig az \underline{y} vektor együtthatói skalár mennyiségek.

Lehetséges olyan leírás is, ahol a kimenőjel vektor együtthatói is mátrixok:

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{G}_i \underline{u}(t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^n \underline{H}_i \underline{y}(t-i\Delta t) \quad (F1-7.)$$

Ez a rendszer-leírás közvetlenül nem írható át törtfüggvény alakba. Mindig elvégezhető azonban a következő átalakítás. Írjuk át először az (Fl-7.) egyenletet shift-operátorosan:

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i} \underline{u}(t) - \sum_{i=1}^n \underline{H}_i z^{-i} \underline{y}(t) \quad (\text{Fl-8.})$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{H}_i z^{-i}] \underline{y}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i} \underline{u}(t) \quad (\text{Fl-9.})$$

Ebből

$$\underline{y}(t) = [\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{H}_i z^{-i}]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i} \underline{u}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{nm} \underline{\Gamma}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{nm} \eta_i z^{-i}} \underline{u}(t) \quad (\text{Fl-10.})$$

Itt az η_i skalárokat és $\underline{\Gamma}_i$ mátrixokat az utóbbi egyenletben implicitite definiáltuk, amennyiben

$$1 + \sum_{i=1}^{nm} \eta_i z^{-i} = \text{Det}[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{H}_i z^{-i}] \quad (\text{Fl-11.})$$

és

$$\sum_{i=0}^{nm} \underline{\Gamma}_i z^{-i} = \text{Adj}[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{H}_i z^{-i}] \sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i} \quad (\text{Fl-12.})$$

Az is látható, hogy bár az (Fl-7.) egyenlet alapján a rendszer n -edrendűnek tűnt, a karakterisztikus polinom fokszáma, vagyis a valódi rendszám nm .

Végül szokásos lineáris folytonos-diszkrét rendszereket leírni az alábbi állapot-teres formában is:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(\Delta t) \underline{x}(t-\Delta t) + \underline{\Psi}(\Delta t) \underline{u}(t) \quad (\text{Fl-13.})$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) \quad (\text{Fl-14.})$$

Itt $\underline{x}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ a rendszer állapot-vektora, a $\underline{\Phi}(\Delta t)$, $\underline{\Psi}(\Delta t)$, \underline{C} és \underline{D} mátrixok pedig az állapot-teres leírás paraméter-mátrixai. Az (Fl-6.) egyenlet szerinti bemenet-kimeneti leírás könnyen előállítható az állapot-egyenletekből. Az (Fl-13.) egyenletet shift-operátorosan átírva és megoldva azt kapjuk, hogy

$$\underline{x}(t) = [\underline{I} - \underline{\Phi}(\Delta t)z^{-1}]^{-1} \underline{\Psi}(\Delta t)\underline{u}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \underline{E}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}} \underline{u}(t) \quad (F1-15.)$$

ahol az \underline{E}_i mátrixokat és h_i skalárokat ismét implicitite definiáltuk. Ez utóbbi eredményt helyettesítsük be az (F1-14.) egyenletbe:

$$\underline{y}(t) = \frac{\underline{C} \sum_{i=0}^{n-1} \underline{E}_i z^{-i} + \underline{D} [1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}]}{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}} \underline{u}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}} \underline{u}(t) \quad (F1-16.)$$

amivel eljutottunk a kívánt leírási formához.

2.Függelék

Véletlen jelek néhány tulajdonsága

A dolgozatban általában véletlen jelekkel foglalkozunk. Ezek olyan valószínűségi változók, amelyek az idő véletlen függvényei; szokásos az ilyen jeleket stochasztikus folyamatoknak is nevezni. Az idő-argumentum lehetséges értékeit tekintve ezek a véletlen jelek folytonos-diszkrét jellegűek abban az értelemben, ahogy azt az 1.Függelékben definiáltuk.

Valamely $\xi(t)$ véletlen jel jellemzésére az alábbi momentumokat fogjuk alkalmazni

várható érték	$E\{\xi(t)\}$
négyzetes várható érték	$E\{\xi^2(t)\}$
szórás négyzet	$E\{[\xi(t)-E\{\xi(t)\}]^2\}$

Általában fel fogjuk tételezni, hogy a véletlen jelek várható értéke zérus: ekkor a szórás négyzet megegyezik a négyzetes várható értékkel.

Az alábbiakban csak várható értékről fogunk beszélni; az elmondottak azonban értelemszerűen érvényesek a többi momentumra is.

A várható érték fogalmi meghatározásának két lehetséges utja van. Az egyik feltételezi, hogy a jelnek (folyamatnak) sok (elvéleg végtelen számu) realizációja létezik egyidőben. Bármely pillanatban meg lehet állapítani az egyes $\xi_i(t)$ realizációk értékeit; ezekkel az u.n. összesség szerinti várható érték az alábbi módon definiálható:

$$E\{\xi(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \quad (F2-1.)$$

Az így definiált várható érték általában függvénye a t időnek. Ha azonban a jel (folyamat) stacionárius, a különböző t pillanatokhoz tartozó várható értékek megegyeznek.

A várható érték fogalmi meghatározásának másik utja feltételezi, hogy a jelnek csak egyetlen realizációja létezik, ez azonban hosszú ideig (elvéleg végtelen hosszú ideig) rendelkez-

zésre áll. A mérnöki szemlélethez ez a megközelítés áll közelebb. Ilyen feltételezés mellett valamely $\xi(t)$ folytonos-diszkrét véletlen jel u.n. idő szerinti várható értékét a következőképpen definiálhatjuk:

$$E\{\xi(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N \xi(t-i\Delta t) \quad (F2-2.)$$

Ha valamely stacionárius véletlen jel összesség szerinti várható értéke megegyezik az idő szerinti várható értékkel, a jelet ergodikusként nevezzük. A dolgozatban mindenütt feltételezzük, hogy stacionárius ergodikus jelekkel állunk szemben és nem teszünk különbséget a kétféle várható érték között.

A négyzetes várható érték fogalmának általánosításával definiálhatjuk a $\xi(t)$ véletlen jel $\ell\Delta t$ eltoláshoz tartozó autokorrelációs sorozatát:

$$p_{\xi\xi}(\ell\Delta t) = E\{\xi(t-\ell\Delta t)\xi(t)\} \quad (F2-3.)$$

Egy zérus várható értékű véletlen jelet időben korrelálatlannak nevezünk, ha csak a zérus eltoláshoz tartozó autokorrelációs értéke (a négyzetes várható értéke) különbözik nullától.

Mint ismeretes, a függetlenség involválja a korrelálatlanságot, a fordított összefüggés azonban csak speciális esetekben áll fenn.

Két véletlen változóra definiálható azok keresztkorrelációs sorozata:

$$p_{\xi\eta}(\ell\Delta t) = E\{\xi(t-\ell\Delta t)\eta(t)\} \quad (F2-4.)$$

Ismét feltéve, hogy a változók zérus várható értékűek, $\xi(t)$ és $\eta(t)$ egymással korrelálatlanok, ha keresztkorrelációs értékük minden eltolásra zérus.

Legyen most $\underline{\xi}(t)$ egy véletlen vektorváltozó. Ennek $\ell\Delta t$ eltoláshoz tartozó korrelációs mátrixát az alábbi módon definiálhatjuk:

$$p_{\underline{\xi}\underline{\xi}}(\ell\Delta t) = E\{\underline{\xi}(t-\ell\Delta t) \underline{\xi}^T(t)\} \quad (F2-5.)$$

Ha $\underline{\xi}(t)$ várható értéke zérus, a korrelációs mátrix egyben a kovariancia-mátrix is. A $\underline{\xi}(t)$ véletlen vektor időben korre-

lálátlan, ha korrelációs (kovariancia) mátrixa minden zérustól különböző eltolásra nulla. Ha a korrelációs (kovariancia) mátrix valamely eltolásra diagonális, az azt jelenti, hogy a vektorváltozó egyes elemei az adott eltolásra egymással korrelálatlanok.

3.Függelék

Mátrix-deriváltak

Mátrixokkal kapcsolatosan az alábbi deriválási szabályokat alkalmazzuk:

1. Egy mátrix deriváltja egy skalár szerint olyan mátrix, amelynek elemei a deriválandó mátrix elemeinek a skalár szerinti deriváltjai. A derivált mátrix szerkezete megegyezik a deriválandó mátrix szerkezetével. Így ha

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(b) \quad (\text{F3-1.})$$

és

$$\underline{\underline{C}} = \frac{d \underline{\underline{A}}(b)}{db} \quad (\text{F3-2.})$$

akkor

$$c_{ij} = \frac{d a_{ij}(b)}{db} \quad (\text{F3-3.})$$

továbbá ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{k} \times \underline{m}$ méretű, akkor a $\underline{\underline{C}}$ mátrix is $\underline{k} \times \underline{m}$ méretű.

2. Egy skalár deriváltja egy mátrix szerint olyan mátrix, amelynek elemei a skalár deriváltjai a mátrix-elemek szerint. A derivált mátrix szerkezetileg a transzponáltja annak a mátrixnak, amely szerint deriválunk. Így ha

$$a = a(\underline{\underline{B}}) \quad (\text{F3-4.})$$

és

$$\underline{\underline{C}} = \frac{d a(\underline{\underline{B}})}{d \underline{\underline{B}}} \quad (\text{F3-5.})$$

akkor

$$c_{ij} = \frac{d a(\underline{\underline{B}})}{d b_{ji}} \quad (\text{F3-6.})$$

továbbá ha a $\underline{\underline{B}}$ mátrix $\underline{k} \times \underline{m}$ méretű, akkor a $\underline{\underline{C}}$ mátrix $\underline{m} \times \underline{k}$ méretű.

A 2. definícióból következik, hogy egy skalár deriváltja egy oszlop mátrix szerint egy sormátrix. Ezt az 1. definícióval egybevetve az is látható, hogy egy \underline{k} méretű oszlop mátrix

deriváltja egy m méretű oszlopmátrix szerint egy $k \times m$ méretű mátrix. Megjegyzendő, hogy a mátrix szerinti derivált szerkezetét a fentivel ellentétes módon is szokták definiálni [C4], ez azonban különböző kényelmetlenségekre vezet (pl. oszlopmátrix oszlopmátrix szerinti deriváltja $k \times m$ hosszúságú oszlopmátrix lenne).

4.Függelék

Skalárértékű mátrixszorzatok deriváltjai

A következőkben bebizonyítjuk, hogy ha \underline{a} és \underline{b} tetszőleges oszlopmátrixok, \underline{F} tetszőleges kvadratikus mátrix, \underline{C} tetszőleges téglalap-mátrix és a megfelelő szorzások elvégezhetők, akkor

$$\frac{d}{d \underline{C}} (\underline{a}^T \underline{C} \underline{b}) = \underline{b} \underline{a}^T \quad (\text{F4-1.})$$

és

$$\frac{d}{d \underline{C}} (\underline{b}^T \underline{C}^T \underline{F} \underline{C} \underline{b}) = \underline{b} \underline{b}^T \underline{C}^T (\underline{F} + \underline{F}^T) \quad (\text{F4-2.})$$

illetve ha \underline{F} szimmetrikus, akkor

$$\frac{d}{d \underline{C}} (\underline{b}^T \underline{C}^T \underline{F} \underline{C} \underline{b}) = 2 \underline{b} \underline{b}^T \underline{C}^T \underline{F} \quad (\text{F4-3.})$$

Először az (F4-1.) állítást bizonyítjuk elemi uton.

Legyen

$$\begin{aligned} \underline{a} &= [a_1 \dots a_m]^T & \underline{b} &= [b_1 \dots b_n]^T \\ \underline{C} &= \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} & \underline{F} &= \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F4-4.})$$

Ezzel

$$\underline{a}^T \underline{C} \underline{b} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i c_{ij} b_j \quad (\text{F4-5.})$$

Ebből

$$\frac{d}{d c_{gh}} (\underline{a}^T \underline{C} \underline{b}) = a_g b_h \quad \begin{aligned} g &= 1 \dots m \\ h &= 1 \dots n \end{aligned} \quad (\text{F4-6.})$$

Ugyanakkor

$$\underline{b} \underline{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_m b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 b_n & \dots & a_m b_n \end{bmatrix} \quad (\text{F4-7.})$$

(F4-7.) és (F4-6.) összehasonlításából

$$(\underline{a}^T)_{hg} = a_g b_h = \frac{d}{d \underline{c}_{gh}} (\underline{a}^T \underline{c} \underline{b}) \quad \begin{matrix} g=1\dots m \\ h=1\dots n \end{matrix} \quad (\text{F4-8.})$$

amivel az (F4-1.) összefüggést bebizonyítottuk.

Az (F4-2.) összefüggés bizonyításához felhasználjuk az (F4-1.) eredményt. Tekintsük egyelőre a \underline{c} és \underline{c}^T mátrixokat külön változóknak. A megfelelő parciális deriváltak:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{c}} (\underline{b}^T \underline{c}^T \underline{F} \underline{c} \underline{b}) = \underline{b} \underline{b}^T \underline{c}^T \underline{F} \quad (\text{F4-9.})$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{c}^T} (\underline{b}^T \underline{c}^T \underline{F} \underline{c} \underline{b}) = \underline{F} \underline{c} \underline{b} \underline{b}^T \quad (\text{F4-10.})$$

Ezekkel a totális derivált

$$\frac{d}{d \underline{c}} (\dots) = \frac{\partial}{\partial \underline{c}} (\dots) + \left[\frac{\partial}{\partial \underline{c}^T} \dots \right]^T \quad (\text{F4-11.})$$

formában kapható, tehát

$$\frac{d}{d \underline{c}} (\underline{b}^T \underline{c}^T \underline{F} \underline{c} \underline{b}) = \underline{b} \underline{b}^T \underline{c}^T \underline{F} + (\underline{F} \underline{c} \underline{b} \underline{b}^T)^T = \underline{b} \underline{b}^T \underline{c}^T (\underline{F} + \underline{F}^T) \quad (\text{F4-12.})$$

Ezzel az (F4-2.) állítást igazoltuk.

Említést érdemelnek még az (F4-1.) és (F4-2.) összefüggések speciális esetei. Ha \underline{c} oszlop mátrix, akkor

$$\frac{d}{d \underline{c}} (\underline{a}^T \underline{c}) = \underline{a}^T \quad (\text{F4-13.})$$

és

$$\frac{d}{d \underline{c}^T} (\underline{c}^T \underline{b}) = \underline{b} \quad (\text{F4-14.})$$

Továbbá

$$\frac{d}{d \underline{c}} (\underline{c}^T \underline{F} \underline{c}) = \underline{c}^T (\underline{F} + \underline{F}^T) \quad (\text{F4-15.})$$

illetve ha \underline{F} szimmetrikus

$$\frac{d}{d \underline{c}} (\underline{c}^T \underline{F} \underline{c}) = 2 \underline{c}^T \underline{F} \quad (\text{F4-16.})$$

*

A továbbiakban azt is megmutatjuk, hogy ha $\underline{p}^{-1} = \underline{R}$ tetszőleges invertálható kvadratikusan mátrix és $Q = Q(\underline{p}^{-1})$ annak skalár függvénye, akkor

$$\frac{dQ(\underline{p}^{-1})}{d \underline{p}} = - \underline{R} \frac{dQ(\underline{R})}{d \underline{R}} \underline{R} \quad (\text{F4-17.})$$

illetve speciálisan ha $Q = \underline{a}^T \underline{P}^{-1} \underline{b}$ ahol \underline{a} és \underline{b} tetszőleges oszlop mátrixok, akkor

$$\frac{d}{d\underline{P}} \underline{a}^T \underline{P}^{-1} \underline{b} = -\underline{P}^{-1} \underline{b} \underline{a}^T \underline{P}^{-1} \quad (\text{F4-18.})$$

Induljunk ki a közismert azonosságból [A2]:

$$d\underline{R} = -\underline{R} d\underline{P} \underline{R} \quad (\text{F4-19.})$$

Ennek kifejtésével igazolható, hogy

$$\Delta r_{\ell k} = -\sum_i \sum_j r_{\ell i} r_{jk} \Delta p_{ij} \quad (\text{F4-20.})$$

ahol $r_{\ell k}$ és p_{ij} az \underline{R} illetve \underline{P} mátrixok elemei. Ebből

$$\frac{dr_{\ell k}}{dp_{ij}} = -r_{\ell i} r_{jk} \quad (\text{F4-21.})$$

Ez utóbbi összefüggésben az ℓ és j illetve i és k indexek együttesen felcserélhetők, tehát

$$-r_{\ell i} r_{jk} = \frac{dr_{\ell k}}{dp_{ij}} = \frac{dr_{ji}}{dp_{kl}} \quad (\text{F4-22.})$$

Irjunk most az (F4-19.) egyenletben $d\underline{P}$ helyett $\frac{dQ}{d\underline{R}}$ -et és vizsgáljuk meg az így előálló

$$\underline{S} = -\underline{R} \frac{dQ}{d\underline{R}} \underline{R} \quad (\text{F4-23.})$$

mátrixot. E mátrix ℓk -adik eleme (F4-20.) mintájára

$$s_{\ell k} = -\sum_i \sum_j r_{\ell i} r_{jk} \frac{dQ}{dr_{ji}} \quad (\text{F4-24.})$$

Az (F4-22.) összefüggésből a második változatot véve

$$s_{\ell k} = \sum_i \sum_j \frac{dr_{ji}}{dp_{kl}} \frac{dQ}{dr_{ji}} = \frac{dQ}{dp_{kl}} \quad (\text{F4-25.})$$

vagyis

$$\underline{S} = -\underline{R} \frac{dQ}{d\underline{R}} \underline{R} = \frac{dQ}{d\underline{P}} \quad (\text{F4-26.})$$

Ezzel az (F4-17.) állítást bizonyítottuk.

Speciálisan ha $Q = \underline{a}^T \underline{P}^{-1} \underline{b}$, akkor (F4-1.) szerint $\frac{dQ}{d\underline{R}} = \underline{b} \underline{a}^T$; ezt behelyettesítve adódik az (F4-18.) összefüggés.

5. Függelék

Egy mátrix-polinomokra vonatkozó azonosság

Legyen az \underline{A} mátrix $(k+m) \times m$ méretű, a \underline{K}_i ($i=0 \dots n$) mátrixok pedig $m \times (k+m)$ méretűek. Bebizonyítjuk, hogy

$$\underline{A} \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} = \underline{I} - \left[\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \right]^{-1} (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0) \quad (\text{F5-1.})$$

és az azonosságon túlmenő megfontolásokkal is alátámasztjuk, hogy a két forma azonos fokszámú átviteli függvény alakra vezet.

Először is belátjuk, hogy ha két azonos méretű mátrix ugyanazon kvadratikus mátrixszal szorozva azonosságra vezet, a két mátrix is azonos. Legyen \underline{X} és \underline{Y} két azonos méretű mátrix, legyen \underline{C} kvadratikus és legyen $\underline{C}\underline{X} = \underline{C}\underline{Y}$ igaz. Ebből következik, hogy $\underline{X} = \underline{C}^{-1} \underline{C}\underline{Y} = \underline{Y}$ is igaz.

Az (F5-1.) feltételezett azonosság mindkét oldalán álló kifejezés $(k+m) \times (k+m)$ méretű. Szorozzuk be előlről mindkét oldalt a kvadratikus $\left[\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \right]$ mátrixszal:

$$\left[\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \right] \underline{A} \left[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A} \right]^{-1} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} = \left[\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \right] (\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0) \quad (\text{F5-2.})$$

A baloldal első tényezőjét \underline{A} -val jobbról beszorozva majd \underline{A} -t balról kiemelve, a jobboldalon pedig összevonva azt kapjuk, hogy

$$\underline{A} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} = \underline{A} \sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i} \quad (\text{F5-3.})$$

ami nyilvánvaló azonosság, állításunkat tehát bizonyítottuk.

Az (F5-1.) kifejezést

$$\underline{W}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{nm} \underline{\Gamma}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{nm} \underline{\eta}_i z^{-i}} \quad (\text{F5-4.})$$

átviteli függvény alakba kívánjuk átírni az 1. Függelékben tárgyalt szabályok szerint. Vizsgáljuk meg (F5-1.) két oldalát fokszám szempontjából.

A baloldalon a $\underline{K}_i \underline{A}$ mátrixok $m \times m$ méretűek, rangjuk legfeljebb \underline{m} . Így az $[\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A}]$ mátrix determinánsában a legnagyobb méretű, tisztán $\underline{K}_i z^{-i} \underline{A}$ -ból származó tagok \underline{m} méretűek, tehát a determináns (az átviteli függvény nevezője) fokszáma mxn . Az adjungált mátrix elemei $(m-1)$ -edrendűek, fokszámukat a $\underline{K}_i \underline{A}$ tagok rangja nem korlátozza, így az adjungált mátrix fokszáma $(m-1) \times n$. Ez az \underline{n} -edfoku $\sum_{i=0}^n \underline{K}_i z^{-i}$ polinommal szorozva (mxn) -edfoku számlálót eredményez.

A jobboldalon az $\underline{A} \underline{K}_i$ mátrixok $(k+m) \times (k+m)$ méretűek, rangjuk viszont legfeljebb \underline{m} . Így az $[\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]$ mátrix determinánsában a legnagyobb méretű, tisztán $\underline{A} \underline{K}_i z^{-i}$ -ből származó el nem tűnő tagok \underline{m} méretűek, vagyis a determináns fokszáma mxn . Az adjungált mátrix elemei $(k+m-1)$ -edrendűek, de mivel bennük az $\underline{A} \underline{K}_i z^{-i}$ -ből származó tagok rangja \underline{m} , az adjungált fokszáma mxn . Ez a nulladfoku $(\underline{I} - \underline{A} \underline{K}_0)$ mátrixszal szorozva mxn -edfoku kifejezést ad. A jobboldalon szerepel még az egységmátrix is; ez közös nevezőre hozás után $\underline{I} \cdot \det[\underline{I} + \underline{A} \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i}]$ lesz, ami szintén mxn -edfoku.

6. Függelék

Mátrixok nyomára vonatkozó néhány összefüggés

A következőkben bebizonyítjuk, hogy ha $\underline{\xi}(t)$ egy ℓ elemű véletlen vektor és

$$\underline{P} = E\{\underline{\xi}(t) \underline{\xi}^T(t)\} \quad (F6-1.)$$

továbbá \underline{B} egy tetszőleges $\ell \times \ell$ méretű mátrix, akkor

$$E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}^{-1} \underline{B} \underline{\xi}(t)\} = \text{tr } \underline{B} \quad (F6-2.)$$

illetve, ennek speciális eseteként,

$$E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}^{-1} \underline{\xi}(t)\} = \ell \quad (F6-3.)$$

valamint ha az \underline{A} és \underline{C} mátrixok mindkét irányban összeszorzhatóak, akkor

$$\text{tr}(\underline{A} \underline{C}) = \text{tr}(\underline{C} \underline{A}) \quad (F6-4.)$$

Először az (F6-2.) összefüggést fogjuk bebizonyítani.

Legyen

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\ell 1} & \dots & b_{\ell\ell} \end{bmatrix}; \quad \underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_\ell(t) \end{bmatrix} \quad (F6-5.)$$

és írjuk fel a \underline{P}^{-1} inverz mátrixot a szokásos módon:

$$\underline{P}^{-1} = \frac{1}{|\underline{P}|} \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{\ell 1} & \dots & P_{\ell\ell} \end{bmatrix} \quad (F6-6.)$$

ahol $|\underline{P}|$ a \underline{P} mátrix determinánsa, P_{ij} pedig a \underline{P} mátrix ij -edik eleméhez tartozó előjeles aldetermináns (az adjungált mátrix ji -edik eleme). Ezzel

$$E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}^{-1} \underline{B} \underline{\xi}(t)\} = E\left\{\frac{1}{|\underline{P}|} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \xi_j(t) P_{kj} b_{ki} \xi_i(t)\right\} \quad (F6-7.)$$

A várhatóérték-képzés és összegzés felcserélésével

$$E\{\underline{\xi}^T(t) \underline{P}^{-1} \underline{B} \underline{\xi}(t)\} = \frac{1}{|\underline{P}|} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} b_{ki} P_{kj} E\{\xi_j(t) \xi_i(t)\} \quad (F6-8.)$$

Az (F6-1.) definícióból látható, hogy

$$E\{\xi_j(t) \xi_i(t)\} = p_{ji} = p_{ij} \quad (\text{F6-9.})$$

ahol p_{ji} a $\underline{\underline{P}}$ mátrix ji -edik eleme (és $\underline{\underline{P}}$ szimmetrikus).
Ezzel

$$E\{\underline{\underline{\xi}}^T(t) \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\xi}}(t)\} = \frac{1}{|\underline{\underline{P}}|} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} b_{ki} p_{kj} p_{ij} \quad (\text{F6-10.})$$

Az összegek átrendezésével

$$E\{\underline{\underline{\xi}}^T(t) \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\xi}}(t)\} = \frac{1}{|\underline{\underline{P}}|} \sum_{k=1}^{\ell} [b_{kk} \sum_{j=1}^{\ell} p_{kj} p_{kj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\ell} b_{ki} \sum_{j=1}^{\ell} p_{kj} p_{ij}] \quad (\text{F6-11.})$$

A determinánsok egy ismert alapösszefüggése szerint

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_{kj} p_{ij} = \begin{cases} |\underline{\underline{P}}| & \text{ha } i=k \\ 0 & \text{ha } i \neq k \end{cases} \quad (\text{F6-12.})$$

Ezzel

$$E\{\underline{\underline{\xi}}^T(t) \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\xi}}(t)\} = \sum_{k=1}^{\ell} b_{kk} = \text{tr } \underline{\underline{B}} \quad (\text{F6-13.})$$

vagyis az (F6-2.) összefüggést bizonyítottuk.

Ha most $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{I}}$ és $\underline{\underline{I}}$ $\ell \times \ell$ méretű, akkor

$$E\{\underline{\underline{\xi}}^T(t) \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{\xi}}(t)\} = \text{tr } \underline{\underline{I}} = \ell \quad (\text{F6-14.})$$

amivel az (F6-3.) összefüggést is bizonyítottuk.

Végül tekintsük az alábbi két mátrixot:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{F6-15.})$$

Ezekkel

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m a_{li} c_{il} & \dots & \dots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \sum_{i=1}^m a_{ni} c_{in} \end{bmatrix} \quad (\text{F6-16.})$$

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_{lj} a_{jl} & \dots & \dots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \sum_{j=1}^n c_{mj} a_{jm} \end{bmatrix} \quad (\text{F6-17.})$$

Ebből a két mátrix-szorzat nyoma:

$$\text{tr}(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ki} c_{ik} \quad (\text{F6-18.})$$

$$\text{tr}(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}}) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n c_{kj} a_{jk} \quad (\text{F6-19.})$$

Az indexek átjelölése után látható, hogy a két kifejezés azonos, vagyis

$$\text{tr}(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}) = \text{tr}(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}}) \quad (\text{F6-20.})$$

amint az (F6-4.) összefüggésben állítottuk.

7.Függelék

Egy-bemenet egy-kimenetű lineáris folytonos-diszkrét rendszer kimeneti autokorrelációs sorozatának számítása időtartományban korrelálatlan véletlen bemenőjel esetén [B2,B8].

Tekintsünk egy egy-bemenet egy-kimenetű stabil lineáris folytonos-diszkrét rendszert, amelynek diszkrét átviteli függvénye

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^n g_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}} \quad (F7-1.)$$

Ennek megfelelően az $u(t)$ bemenőjel és $y(t)$ kimenőjel között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$y(t) = \sum_{i=0}^n g_i u(t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^n h_i y(t-i\Delta t) \quad (F7-2.)$$

Definiáljuk a két jel auto- és kereszt-korrelációs sorozatait a szokásos módon:

$$\begin{aligned} p_{uu}(\ell\Delta t) &= E\{u(t-\ell\Delta t) u(t)\} \\ p_{uy}(\ell\Delta t) &= E\{u(t-\ell\Delta t) y(t)\} \\ p_{yy}(\ell\Delta t) &= E\{y(t-\ell\Delta t) y(t)\} \end{aligned} \quad (F7-3.)$$

Mint ismeretes, az autokorrelációs sorozatok szimmetrikusak, tehát

$$\begin{aligned} p_{uu}(\ell\Delta t) &= p_{uu}(-\ell\Delta t) \\ p_{yy}(\ell\Delta t) &= p_{yy}(-\ell\Delta t) \end{aligned} \quad (F7-4.)$$

Az (F7-3.) definíciókból az (F7-2.) egyenlet felhasználásával levezethetők az ismert összefüggések:

$$p_{uy}(\ell\Delta t) = \sum_{i=0}^n g_i p_{uu}(\ell\Delta t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^n h_i p_{uy}(\ell\Delta t-i\Delta t) \quad (F7-5.)$$

$$p_{yy}(\ell\Delta t) = \sum_{i=0}^n g_i p_{uy}(i\Delta t-\ell\Delta t) - \sum_{i=1}^n h_i p_{yy}(i\Delta t-\ell\Delta t) \quad (F7-6.)$$

Legyen a bemenőjel fehér (autokorrelálatlan) véletlen jel zérus várható értékkel. Ekkor

$$p_{uu}(\ell\Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \ell \neq 0 \\ \sigma_u^2 & \text{ha } \ell = 0 \end{cases} \quad (\text{F7-7.})$$

ahol σ_u a bemenőjel szórása. Miután a kimenőjel kauzálisan nem függ az őt időben követő bemenőjel értékektől, a bemenőjel fehérségéből az is következik, hogy

$$p_{uy}(\ell\Delta t) = 0 \quad \text{ha } \ell < 0 \quad (\text{F7-8.})$$

Ezzel az (F7-5.) összefüggés az alábbi formára egyszerűsödik:

$$p_{uy}(\ell\Delta t) = g_\ell \sigma_u^2 - \sum_{i=1}^{\ell} h_i p_{uy}(\ell\Delta t - i\Delta t) \quad \ell \geq 0 \quad (\text{F7-9.})$$

Az (F7-9.) egyenlet közvetlenül alkalmas a p_{uy} kereszt-korrelációs sorozat elemeinek kiszámítására; a számítást $\ell=0$ -nál kell kezdeni. A továbbiak előkészítése céljából az (F7-9.) egyenletet mátrix-alakban is felírjuk az $\ell = 0 \dots n$ esetekre. A skalár egyenletek:

$$\begin{aligned} p_{uy}(0) &= g_0 \sigma_u^2 \\ p_{uy}(\Delta t) &= g_1 \sigma_u^2 - h_1 p_{uy}(0) \\ p_{uy}(2\Delta t) &= g_2 \sigma_u^2 - h_1 p_{uy}(\Delta t) - h_2 p_{uy}(0) \\ &\vdots \\ p_{uy}(n\Delta t) &= g_n \sigma_u^2 - h_1 p_{uy}(n\Delta t - \Delta t) - h_2 p_{uy}(n\Delta t - 2\Delta t) - \dots - h_n p_{uy}(0) \end{aligned} \quad (\text{F7-10.})$$

Legyen

$$\underline{p}_{uy} = \begin{bmatrix} p_{uy}(0) \\ \vdots \\ p_{uy}(n\Delta t) \end{bmatrix}; \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}; \quad \underline{H}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n-1} & \dots & h_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F7-11.})$$

Ezzel az (F7-10.) egyenlet-rendszer mátrix alakja:

$$\underline{p}_{uy} = \underline{g} \sigma_u^2 - \underline{H}_A \underline{p}_{uy} \quad (\text{F7-12.})$$

amiből

$$\underline{p}_{uy} = (\underline{I} + \underline{H}_A)^{-1} \underline{g} \sigma_u^2 \quad (\text{F7-13.})$$

A \underline{p}_{yy} autokorrelációs sorozat elemeinek számítása érdekében az (F7-6.) egyenlethez kell fordulnunk. Ha itt is az $\ell \geq 0$ esetre korlátozódunk, ez - az (F7-8.) összefüggés alapján - átírható az alábbi formába:

$$p_{yy}(\ell \Delta t) = \sum_{i=\ell}^n g_i p_{uy}(i \Delta t - \ell \Delta t) - \sum_{i=1}^n h_i p_{yy}(i \Delta t - \ell \Delta t) \quad \text{ha } \ell \geq 0 \quad (\text{F7-14.})$$

Ez azonban közvetlenül még nem használható, még úgy sem, ha ℓ több különböző értékére felírjuk, mivel az ismeretlenek száma mindig meghaladja az egyenletekét. Megoldhatóvá válik azonban a feladat, ha p_{yy} negatív argumentumu elemeit - a szimmetria tulajdonság felhasználásával - kiküszöböljük. Ezzel az (F7-14) egyenlet az alábbi lesz:

$$p_{yy}(\ell \Delta t) = \sum_{i=\ell}^n g_i p_{uy}(i \Delta t - \ell \Delta t) - \sum_{i=1}^{\ell} h_i p_{yy}(\ell \Delta t - i \Delta t) - \sum_{i=\ell+1}^n h_i p_{yy}(i \Delta t - \ell \Delta t) \quad \ell \geq 0 \quad (\text{F7-15.})$$

Részletesen kiírva az $\ell = 0 \dots n$ esetekre

$$p_{yy}(0) = [g_0 p_{uy}(0) + \dots + g_n p_{uy}(n \Delta t)] - [h_1 p_{yy}(\Delta t) + \dots + h_n p_{yy}(n \Delta t)]$$

$$p_{yy}(\Delta t) = [g_1 p_{uy}(0) + \dots + g_n p_{uy}(n \Delta t - \Delta t)] - [h_1 p_{yy}(0)] - [h_2 p_{yy}(\Delta t) + \dots + h_n p_{yy}(n \Delta t - \Delta t)]$$

$$p_{yy}(2 \Delta t) = [g_2 p_{uy}(0) + \dots + g_n p_{uy}(n \Delta t - 2 \Delta t)] - [h_1 p_{yy}(\Delta t) + h_2 p_{yy}(0)] - [h_3 p_{yy}(\Delta t) + \dots + h_n p_{yy}(n \Delta t - 2 \Delta t)]$$

$$p_{yy}(n \Delta t) = [g_n p_{uy}(0)] - [h_1 p_{yy}(n \Delta t - \Delta t) + \dots + h_n p_{yy}(0)] \quad (\text{F7-16.})$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\underline{p}_{yy} = \begin{bmatrix} p_{yy}(0) \\ \vdots \\ p_{yy}(n\Delta t) \end{bmatrix}; \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 \dots g_{n-1} & g_n \\ g_1 & g_2 \dots g_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1} & g_n \dots 0 & 0 \\ g_n & 0 \dots 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{H}_F = \begin{bmatrix} 0 & h_1 \dots h_{n-1} & h_n \\ 0 & h_2 \dots h_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & h_n \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F7-17.

Ezekkel az F7-16. egyenlet-rendszer az alábbi mátrix-egyenlet-be sűrithető:

$$\underline{p}_{yy} = \underline{G} \underline{p}_{uy} - \underline{H}_A \underline{p}_{yy} - \underline{H}_F \underline{p}_{yy} \quad \text{F7-18.}$$

amiből

$$\underline{p}_{yy} = [\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F]^{-1} \underline{G} \underline{p}_{uy} \quad \text{F7-19.}$$

Vegyük most még figyelembe az F7-14. formulát; így eljutunk levezetésünk végső eredményéhez:

$$\underline{p}_{yy} = [\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F]^{-1} \underline{G} [\underline{I} + \underline{H}_A]^{-1} \underline{g} \underline{e}_0^T \quad \text{F7-20.}$$

Ha a \underline{p}_{yy} vektornak csak valamelyik elemére van szükségünk, azt a

$$p_{yy}(i\Delta t) = \underline{e}_i^T \underline{p}_{yy} = \underline{e}_i^T [\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F]^{-1} \underline{G} [\underline{I} + \underline{H}_A]^{-1} \underline{g} \underline{e}_0^T \quad \text{F7-21.}$$

formula szerint kaphatjuk meg, ahol

$$\underline{e}_i^T = \begin{bmatrix} 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & i-1 & i & i+1 & n \end{bmatrix} \quad \text{F7-22.}$$

Az $i=0$ esetben az F7-21. formula a kimenőjel szórásnégyzetét adja.

Hangsúlyozzuk, hogy levezetésünkben mindvégig feltételeztük a be- és kimenő-jel stacionaritását. Instabil rendszer esetében azonban stacionárius bemenő-jel is instacionárius kimenő-jel eredményez. A levezetett formulák ezért instabil rendszerekre nem érvényesek.

Megjegyezzük, hogy a feladat más módon, a kimenő-jel teljesítmény-sűrűség spektrumának előállításával és faktorizációjával is megoldható [pl. [A6]].

8. Függelék

Több-bemenet több-kimenetű lineáris folytonos-diszkrét rendszerek kimeneti autokorrelációjának számítása

A következőkben kiterjesztjük a 7. Függelékben bevezetett módszereket több-bemenet több-kimenetű stabil rendszerekre.

Legyen $\underline{u}(t) = [u_1(t) \dots u_k(t)]^T$ a rendszer bemenőjelének vektora, $\underline{y}(t) = [y_1(t) \dots y_m(t)]^T$ pedig a rendszer kimenőjelének vektora és legyen a rendszer átviteli függvény mátrixa az alábbi:

$$\underline{W}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n \underline{G}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^{-i}} \quad (\text{F8-1.})$$

Ennek megfelelően a bemenőjel és kimenőjel között a következő összefüggés áll fenn:

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=0}^n \underline{G}_i \underline{u}(t-i\Delta t) - \sum_{i=1}^n h_i \underline{y}(t-i\Delta t) \quad (\text{F8-2.})$$

Vezessük be a kimenőjel autokorrelációjának alábbi skalár mértékét:

$$R = E\{\underline{y}^T(t) \underline{M} \underline{y}(t)\} \quad (\text{F8-3.})$$

ahol \underline{M} egy tetszőleges szimmetrikus mátrix. Tételezzük fel, hogy az $\underline{u}(t)$ bemenőjel időben korrelálatlan véletlen vektor zérus várható értékkel és $\underline{P} = E\{\underline{u}(t)\underline{u}^T(t)\}$ kovariancia-mátrixszal. Feladatunk $\underline{W}(z)$, \underline{M} és \underline{P} ismeretében az R mennyiség meghatározása.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$q_{uu}^{ji}(\ell\Delta t) = E\{\underline{u}^T(t-\ell\Delta t) \underline{G}_j^T \underline{M} \underline{G}_i \underline{u}(t)\} \quad i=0\dots n; j=0\dots n \quad (\text{F8-4})$$

$$q_{uy}^j(\ell\Delta t) = E\{\underline{u}^T(t-\ell\Delta t) \underline{G}_j^T \underline{M} \underline{y}(t)\} \quad j=0\dots n \quad (\text{F8-5})$$

$$q_{yy}(\ell\Delta t) = E\{\underline{y}^T(t-\ell\Delta t) \underline{M} \underline{y}(t)\} \quad (\text{F8-6})$$

Nyilvánvalóan $R = q_{yy}(0)$.

Miután $\underline{u}(t)$ időben korrelálatlan,

$$q_{uu}^{ji}(\ell\Delta t) = 0 \quad \text{ha } \ell \neq 0 \quad (\text{F8-7.})$$

bármely j -re és i -re. Továbbá, a kauzalitás elvét is figyelembe véve,

$$q_{uy}^j(\ell\Delta t) = 0 \quad \text{ha } \ell < 0 \quad (\text{F8-8.})$$

bármely j -re.

Vezessünk még be további jelöléseket. Legyen:

$$r_{uy}^\ell = \sum_{j=\ell}^n q_{uy}^j(j\Delta t - \ell\Delta t) \quad (\text{F8-9.})$$

valamint

$$\underline{q}_{uu}^j = [q_{uu}^{j0}(0); \dots; q_{uu}^{jn}(0)]^T \quad j=0\dots n \quad (\text{F8-10.})$$

$$\underline{q}_{uy}^j = [q_{uy}^j(0); \dots; q_{uy}^j(n\Delta t)]^T \quad j=0\dots n \quad (\text{F8-11.})$$

$$\underline{q}_{yy} = [q_{yy}(0); \dots; q_{yy}(n\Delta t)]^T \quad (\text{F8-12.})$$

$$\underline{r}_{uy} = [r_{uy}^0; \dots; r_{uy}^n]^T \quad (\text{F8-13.})$$

Először a \underline{q}_{uy}^j vektorokat fogjuk meghatározni. A levezetés követi a 7.Függelék megfelelő részeinek gondolatmenetét. Ha az (F8-2.) egyenletet alkalmazzuk az (F8-5.) definícióra, az (F7-5.) egyenlethez hasonló összefüggésekhez jutunk. Ha most figyelembe vesszük az (F8-7.) és (F8-8.) egyenleteket is, az (F7-9.) egyenlet megfelelőjét kapjuk. Az így nyert egyenletek mátrix-formája - az (F7-12.) mintájára és figyelembe véve az (F8-10.) és (F8-11.) definíciókat -:

$$\underline{q}_{uy}^j = \underline{q}_{uu}^j - \underline{H}_A \underline{q}_{uy}^j \quad j=0\dots n \quad (\text{F8-14.})$$

Ennek megoldása

$$\underline{q}_{uy}^j = (\underline{I} + \underline{H}_A)^{-1} \underline{q}_{uu}^j = \underline{E} \underline{q}_{uu}^j \quad j=0\dots n \quad (\text{F8-15.})$$

ahol az \underline{E} mátrixot az egyenletben implicitite definiáltuk.

Ezután a \underline{q}_{yy} vektor meghatározása következik. Most az (F8-6.) definícióra alkalmazzuk az (F8-2.) egyenletet; ismét a 7.Függelék gondolatmenetét követjük és felhasználjuk a q_{yy} sorozat szimmetriáját, vagyis azt a tényt, hogy $q_{yy}(\ell\Delta t) = q_{yy}(-\ell\Delta t)$. Ezzel, valamint az (F8-12.) és (F8-13.) vektor-definíciókkal az alábbi mátrix-egyenletre jutunk:

$$\underline{q}_{yy} = \underline{r}_{uy} - \underline{H}_A \underline{q}_{yy} - \underline{H}_F \underline{q}_{yy} \quad (\text{F8-16.})$$

Ennek megoldása

$$\underline{q}_{yy} = (\underline{I} + \underline{H}_A + \underline{H}_F)^{-1} \underline{r}_{uy} = \underline{F} \underline{r}_{uy} \quad (\text{F8-17.})$$

ahol az \underline{F} mátrixot az (F8-17.) egyenletben implicitite definiáltuk.

A legutóbbi eredményből az \underline{R} mennyiséget felírhatjuk

$$\underline{R} = \underline{q}_{yy}(0) = \sum_{i=0}^n f_{oi} r_{uy}^i \quad (\text{F8-18.})$$

ahol az f_{oi} oefficiensek az \underline{F} mátrix nulladik sorának elemei. Az (F8-9.) definíció alapján ez tovább írható

$$\underline{R} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n f_{oi} q_{uy}^j(j\Delta t - i\Delta t) \quad (\text{F8-19.})$$

Ugyanakkor az (F8-15.) egyenletből

$$q_{uy}^j(j\Delta t - i\Delta t) = \sum_{\ell=0}^n e_{(j-i)\ell} q_{uu}^{j\ell}(0) \quad \begin{matrix} i=0\dots n \\ j=i\dots n \end{matrix} \quad (\text{F8-20.})$$

ahol az $e_{(j-i)\ell}$ oefficiensek az \underline{E} mátrix megfelelő elemei. Ezt az (F8-19.) formulába helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\underline{R} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \sum_{\ell=0}^n f_{oi} e_{(j-i)\ell} q_{uu}^{j\ell}(0) \quad (\text{F8-21.})$$

Végül felhasználva az (F8-4.) definíciót és felcserélve az összegezés és várható érték képzés sorrendjét jutunk a végső eredményhez:

$$\underline{R} = E\{\underline{u}^T(t) [\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \sum_{\ell=0}^n f_{oi} e_{(j-i)\ell} \underline{G}_j^T \underline{M} \underline{G}_\ell] \underline{u}(t)\} \quad (\text{F8-22.})$$

Az (F8-22.) formulát még számításra alkalmasabb alakra hozhatjuk. A hármas szumma egy $k \times k$ méretű mátrixot ad; jelöljük ezt \underline{S} -sel. Másrészt $E\{\underline{u}(t) \underline{u}^T(t)\} = \underline{P}$ a bemenőjel zérus eltoláshoz tartozó kovariancia mátrixa. Ezekkel

$$\underline{R} = E\{\underline{u}^T(t) \underline{S} \underline{u}(t)\} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k s_{ij} p_{ij} \quad (\text{F8-23.})$$

ahol s_{ij} és p_{ij} az \underline{S} és \underline{P} mátrixok megfelelő elemei.

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a fentiekben levezetett összefüggések csak stabil rendszerekre érvényesek.

Megjegyezzük még, hogy hipermátrixok alkalmazásával az (F8-22.) képlet a 7.Függelék (F7-21.) képletével formálisan azonos alakban is felírható.

9. Függelék

Egy feltételes szélsőérték probléma (szuboptimális szűrő)

Legyen $\underline{u}(t)$ egy m elemű véletlen vektor, \underline{P} egy $(m+k) \times (m+k)$ méretű szimmetrikus pozitív definit mátrix és \underline{K}_0 egy $m \times (m+k)$ méretű mátrix. Keressük az $(m+k) \times m$ méretű \underline{A} mátrixnak azt az \underline{A}_S értékét, amely minimalizálja az

$$R = E\{\underline{u}^T(t) \underline{A}^T \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{u}(t)\} \quad (F9-1.)$$

skalár jósági indexet, miközben kielégül az

$$\underline{I} - \underline{K}_0 \underline{A} = \underline{O} \quad (F9-2.)$$

mátrix-egyenlőség. A következőkben meg fogjuk mutatni, hogy a megoldás

$$\underline{A}_S = \underline{P} \underline{K}_0^T (\underline{K}_0 \underline{P} \underline{K}_0^T)^{-1} \quad (F9-3.)$$

Az (F9-2.) mátrix-egyenlőség $m \times m$ skalár-egyenlőséget foglal magában. A feltételes szélsőérték feladatot a szokásos Lagrange technikával fogjuk megoldani; hogy ezt alkalmazhassuk, a zérusra rendezett skalár feltételeknek a megfelelő multiplikátorokkal súlyozott összegét kell a jósági indexhez hozzáadnunk. Ha a Lagrange multiplikátorokat egy

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mm} \end{bmatrix} \quad (F9-4.)$$

mátrixban foglaljuk össze, akkor ez a súlyozott összeg az alábbi módon írható fel:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\underline{I} - \underline{K}_0 \underline{A})_{ij} \lambda_{ij} = \sum_{\ell=1}^m \underline{e}_{\ell}^T (\underline{I} - \underline{K}_0 \underline{A}) \underline{\Lambda}^T \underline{e}_{\ell} \quad (F9-5.)$$

ahol

$$\underline{e}_{\ell}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ell-1 & \ell & \ell+1 & m \end{bmatrix} \quad (F9-6.)$$

Ezzel a korlátozást is figyelembe vevő jósági index

$$R^* = E\{\underline{u}^T(t) \underline{A}^T \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{u}(t)\} + \sum_{\ell=1}^m \underline{e}_{\ell}^T (\underline{I} - \underline{K}_O \underline{A}) \underline{\Lambda}^T \underline{e}_{\ell} \quad (F9-7.)$$

Az \underline{A} mátrix optimális értékét R^* deriválásával fogjuk megállapítani. Az (F4-1.) és (F4-3.) összefüggések alapján

$$\frac{dR^*}{d\underline{A}} = 2E\{\underline{u}(t)\underline{u}^T(t)\underline{A}^T \underline{P}^{-1}\} - \sum_{\ell=1}^m \underline{\Lambda}^T \underline{e}_{\ell} \underline{e}_{\ell}^T \underline{K}_O \quad (F9-8.)$$

Bevezetve az $\underline{M} = E\{\underline{u}(t)\underline{u}^T(t)\}$ jelölést és felismerve, hogy $\sum_{\ell=1}^m \underline{e}_{\ell} \underline{e}_{\ell}^T = \underline{I}$, ez utóbbi összefüggés tovább írható

$$\frac{dR^*}{d\underline{A}} = 2\underline{M} \underline{A}^T \underline{P}^{-1} - \underline{\Lambda}^T \underline{K}_O \quad (F9-9.)$$

Az optimum helyén a derivált zérus, tehát

$$2\underline{M} \underline{A}_S^T \underline{P}^{-1} - \underline{\Lambda}^T \underline{K}_O = \underline{0} \quad (F9-10.)$$

Ez megoldható \underline{A}_S^T -ra:

$$\underline{A}_S^T = \frac{1}{2} \underline{M}^{-1} \underline{\Lambda}^T \underline{K}_O \underline{P} \quad (F9-11.)$$

illetve

$$\underline{A}_S = \frac{1}{2} \underline{P} \underline{K}_O^T \underline{\Lambda} \underline{M}^{-1} \quad (F9-12.)$$

ahol kihasználtuk azt, hogy \underline{P} és \underline{M} szimmetrikus.

Az (F9-12.) eredmény még tartalmazza a $\underline{\Lambda}$ mátrixot. Hogy ezt kiküszöböljük, helyettesítsük be ez utóbbi eredményt az (F9-2.) egyenlőségbe:

$$\underline{I} - \frac{1}{2} \underline{K}_O \underline{P} \underline{K}_O^T \underline{\Lambda} \underline{M}^{-1} = \underline{0} \quad (F9-13.)$$

Ezt $\underline{\Lambda}$ -ra meg lehet oldani, ha $\underline{K}_O \underline{P} \underline{K}_O^T$ invertálható:

$$\underline{\Lambda} = 2(\underline{K}_O \underline{P} \underline{K}_O^T)^{-1} \underline{M} \quad (F9-14.)$$

$\underline{\Lambda}$ így nyert kifejezését az (F9-12.) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk a végső eredményt:

$$\underline{A}_S = \underline{P} \underline{K}_O^T (\underline{K}_O \underline{P} \underline{K}_O^T)^{-1} \quad (F9-15.)$$

ami egybevág az (F9-3.) egyenletben megfogalmazott állítással.

A megoldás feltétele a $\underline{K}_O \underline{P} \underline{K}_O^T$ mátrix-szorzat invertálhatósága. A szorzat mérete $m \times m$. A \underline{P} mátrix rangja általában $m+k$, a \underline{K}_O mátrix rangja pedig általában \underline{m} , így a szorzat rangja általában \underline{m} .

Hátra van még annak bizonyítása, hogy a kapott szélsőérték valóban minimum. Ehhez R^* második deriváltját kellene előállítani az \underline{A} mátrix szerint, ami egy négydimenziós struktúra lenne. Hogy az ezzel járó formális nehézségeket elkerüljük, az \underline{A} mátrixot oszlopokra bontjuk és ezek szerint deriváljuk a jósági indexet. Mivel a Lagrange tag a második deriváltba már nem szól bele, csak az \underline{R} kifejezést fogjuk vizsgálni.

Jelölje \underline{a}_i az \underline{A} mátrix i -edik oszlopát. Ezzel \underline{A} és \underline{A}^T az alábbi módon írható fel:

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^m \underline{a}_i \underline{e}_i^T \quad \underline{A}^T = \sum_{i=1}^m \underline{e}_i \underline{a}_i^T \quad (\text{F9-16.})$$

ahol az \underline{e}_i vektor az (F9-6.) definíció szerinti. Így

$$R = E\{\underline{\mu}^T(t) [\sum_{i=1}^m \underline{e}_i \underline{a}_i^T] \underline{P}^{-1} [\sum_{i=1}^m \underline{a}_i \underline{e}_i^T] \underline{\mu}(t)\} \quad (\text{F9-17.})$$

Átrendezve és felismerve, hogy $\underline{e}_i^T \underline{\mu}(t) = \mu_i$ (a $\underline{\mu}(t)$ vektor i -edik eleme):

$$R = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m E\{\mu_i(t) \mu_j(t)\} \underline{a}_i^T \underline{P}^{-1} \underline{a}_j \quad (\text{F9-18.})$$

Ennek deriváltja az \underline{a}_ℓ oszlopmátrix szerint, az (F4-13) és (F4-14.) összefüggések alapján:

$$\frac{dR}{d\underline{a}_\ell} = 2 \sum_{i=1}^m E\{\mu_i(t) \mu_\ell(t)\} \underline{a}_i^T \underline{P}^{-1} \quad \ell=1\dots m \quad (\text{F9-19.})$$

a második derivált pedig

$$\frac{d^2 R}{d\underline{a}_\ell^2} = 2E\{\mu_\ell^2(t)\} \underline{P}^{-1} \quad \ell=1\dots m \quad (\text{F9-20.})$$

Mivel a \underline{P} mátrix pozitív definit, a szélsőérték bármelyik \underline{a}_ℓ vektor szerint minimum, hacsak $E\{\mu_\ell^2(t)\}$ nem zérus. (Ha $E\{\mu_\ell^2(t)\} = 0$, a jósági index nem függ \underline{a}_ℓ -től.)

10. Függelék

A folytonos diszkrét leírás határérték tulajdonságai

A következőkben stabil és nem integráló, racionális törtfüggvény alaku folytonos átviteli függvénnyel rendelkező folytonos rendszereknek az (Fl-5.) szerinti folytonos-diszkrét leírásával foglalkozunk és megvizsgáljuk ez utóbbi viselkedését a Δt mintavételi időköz extrémális értékei mellett. Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$\underline{G}_i \rightarrow \underline{0} \quad i = 0 \dots n \quad \text{ha} \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad (\text{Flo-1.})$$

és ugyanakkor az $1+h_1 z^{-1} + \dots + h_n z^{-n}$ nevező $(1-z^{-1})^n$ -hez tart, illetve hogy

$$\underline{G}_i \rightarrow \underline{0} \quad \text{és} \quad h_i \rightarrow 0 \quad i=1 \dots n \quad \text{ha} \quad \Delta t \rightarrow \infty \quad (\text{Flo-2.})$$

A bizonyításhoz elegendő azt megmutatni, hogy az elemi alrendszerek, amelyekre minden összetett rendszer felbontható, a fenti tulajdonságokkal rendelkeznek; az összetett rendszerekbe ezek a tulajdonságok invariáns módon átmennek. Egyszeres pólusokra és a bemenőjel téglalap-közelítésére szorítkozunk; többszörös pólusokra és a bemenőjel más közelítéseire a bizonyítás hasonló módon elvégezhető.

Legyen a folytonos rendszer egy valós pólusa α . Ha a rendszer stabil, $\alpha < 0$. Az ehhez tartozó elemi folytonos-diszkrét átviteli függvény [B7]

$$W(z) = \frac{g_0}{1+h_1 z^{-1}} = \frac{1 - e^{\alpha \Delta t}}{1 - e^{\alpha \Delta t} z^{-1}} \quad (\text{Flo-3.})$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor $e^{\alpha \Delta t} \rightarrow 1$ és ezzel

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} W(z) = \frac{0}{1 - z^{-1}} \quad (\text{Flo-4.})$$

vagyis $g_0 \rightarrow 0$. Ha viszont $\Delta t \rightarrow \infty$, akkor $e^{\alpha \Delta t} \rightarrow 0$ és ezzel

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} W(z) = \frac{1}{1} \quad (\text{Flo-5.})$$

vagyis $h_1 \rightarrow 0$.

Legyen most a folytonos rendszer egy komplex póluspárja $\alpha \pm j\beta$. A stabilitásból következik, hogy most is $\alpha < 0$. E komplex póluspárhoz két elemi folytonos-diszkrét átviteli függvény tartozik (az exponenciális-koszinusos illetve az exponenciális-szinuszos súlyfüggvényeknek megfelelően) [B7]:

$$W_1(z) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}} = \frac{\gamma_1 e^{\alpha \Delta t} (\gamma_2 \sin \beta \Delta t + \gamma_1 \cos \beta \Delta t) z^{-1}}{1 - 2e^{\alpha \Delta t} \cos \beta \Delta t z^{-1} + e^{2\alpha \Delta t} z^{-2}} \quad (\text{Flo-6.})$$

$$W_2(z) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}} = \frac{\gamma_2 e^{\alpha \Delta t} (\gamma_2 \cos \beta \Delta t - \gamma_1 \sin \beta \Delta t) z^{-1}}{1 - 2e^{\alpha \Delta t} \cos \beta \Delta t z^{-1} + e^{2\alpha \Delta t} z^{-2}} \quad (\text{Flo-7.})$$

ahol

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} [e^{\alpha \Delta t} (\frac{\beta}{\alpha} \sin \beta \Delta t + \cos \beta \Delta t) - 1] \quad (\text{Flo-8.})$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} [e^{\alpha \Delta t} (\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \Delta t - \cos \beta \Delta t) + 1] \quad (\text{Flo-9.})$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma_1 = 0 \qquad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma_2 = 0 \quad (\text{Flo-10.})$$

és ezzel

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} W_1(z) = \frac{0}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{0}{(1 - z^{-1})^2} \quad (\text{Flo-11.})$$

illetve

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} W_2(z) = \frac{0}{(1 - z^{-1})^2} \quad (\text{Flo-12.})$$

vagyis $g_0 \rightarrow 0$, $g_1 \rightarrow 0$ mindkét esetben. Ha viszont $\Delta t \rightarrow \infty$, akkor

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \gamma_1 = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \gamma_2 = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{Flo-13.})$$

és ezzel

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} W_1(z) = \frac{-\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}}{1} \quad (\text{Flo-14.})$$

illetve

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} W_2(z) = \frac{\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}}{1} \quad (\text{Flo-15.})$$

vagyis $g_1 \rightarrow 0$ és $h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0$ mindkét esetben.

11. Függelék

Az η_i és Γ_i' mennyiségek kiszámítása

A jósági index meghatározásának első lépése az η_i skalárok és Γ_i' mátrixok kiszámítása a (4-15.) összefüggésből:

$$\frac{\sum_{i=0}^{nm} \Gamma_i' z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{nm} \eta_i z^{-i}} = A \left[I + \sum_{i=1}^n K_i z^{-i} A \right]^{-1} \sum_{i=0}^n K_i z^{-i} \quad (F11-1.)$$

Az algebrai átalakítás gépesítése rendkívül bonyolult lenne, ezért numerikus interpolációt alkalmazunk. Ennek lényege, hogy a z változónak különböző numerikus értékeket adva lineáris egyenletrendszereket állítunk elő az ismeretlen mátrixokra és skalárokra nézve.

Legyen a következőkben

$$B(z) = A \left[I + \sum_{i=1}^n K_i z^{-i} A \right]^{-1} \sum_{i=0}^n K_i z^{-i} \quad (F11-2.)$$

$$d(z) = \left| I + \sum_{i=1}^n K_i z^{-i} A \right| \quad (F11-3.)$$

$$C(z) = d(z) \cdot B(z) \quad (F11-4.)$$

és legyenek z_1, z_2, \dots, z_{nm} számértékek.

Tekintsük először az η_i együtthatók meghatározását. Fennáll, hogy

$$1 + \eta_1 z_j^{-1} + \dots + \eta_{nm} z_j^{-nm} = d(z_j) \quad j=1 \dots nm \quad (F11-5.)$$

vagyis

$$\underline{\eta} \underline{n} = \underline{d} - \underline{e} \quad (F11-6.)$$

ahol

$$\underline{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{nm} \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} d(z_1) \\ \vdots \\ d(z_{nm}) \end{bmatrix} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (F11-7.)$$

és

$$\underline{Z} = \begin{vmatrix} z_1^{-1} & z_1^{-2} & \dots & z_1^{-nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{nm}^{-1} & z_{nm}^{-2} & \dots & z_{nm}^{-nm} \end{vmatrix} \quad (\text{F11-8.})$$

az un. Vandermonde-mátrix. Ebből az η_i paraméterek megkaphatók:

$$\underline{\eta} = \underline{Z}^{-1}(\underline{d} - \underline{e}) \quad (\text{F11-9.})$$

Tekintsük most a $\underline{\Gamma}'_i$ mátrixokat. Az (F11-1.) összefüggésből $z \rightarrow \infty$ határátmenettel azonnal látszik, hogy $\underline{\Gamma}'_0 = \underline{A} \underline{K}_0$. Továbbá a fentiek mintájára

$$\underline{A} \underline{K}_0 + \underline{\Gamma}'_1 z_j^{-1} + \dots + \underline{\Gamma}'_{nm} z_j^{-nm} = \underline{C}(z_j) \quad j=1 \dots nm \quad (\text{F11-10.})$$

Ebből a $\underline{\Gamma}'_i$ mátrixok $\gamma'_{i,pq}$ elemeire vonatkozóan ($p=1 \dots m+k$; $q=1 \dots m+k$) az (F11-9.)-hez hasonló egyenletrendszerek írhatók fel, összesen $(m+k)^2$ számú, egyenként nm ismeretlenes egyenletrendszer az nm számú, $(m+k)^2$ méretű $\underline{\Gamma}'_i$ mátrixnak megfelelően.

A z_j számokat a $\pm[0,5; 2]$ intervallumok egyenletes felosztásával állítjuk elő. Természetesen valamely adott nm értékhez a Vandermonde-mátrixot csak egyszer kell generálni és invertálni (feltéve hogy az $\underline{I} + \sum_{i=1}^n \underline{K}_i z^{-i} \underline{A}$ mátrix - a választott z_j számokkal - valamely vizsgált \underline{A} -ra nem válik szinguláriszá).

12. Függelék

A Bairstow-módszer és kiterjesztése

A Bairstow-módszer [A4,A5] valós együtthatós polinomok gyökeinek meghatározására szolgál. Alapgondolata az, hogy a polinomból másodfoku tényezőket választ le.

Legyen $z^2 + pz + q$ az $f(z)$ polinom közelítő másodfoku tényezője. Fennáll, hogy

$$f(z) = (z^2 + pz + q) \phi(z) + cz + d \quad (\text{F12-1.})$$

ahol $cz + d$ a maradék-tag. A c és d együtthatók p és q függvényei; ez utóbbiakat úgy kell megválasztani, hogy

$$c(p,q) = 0 ; \quad d(p,q) = 0 \quad (\text{F12-2.})$$

teljesüljön. Ezzel egy kétdimenziós numerikus gyökkeresési problémára jutottunk, amelyet a Newton-Raphson technikával oldunk meg:

$$\begin{bmatrix} p^{(i+1)} \\ q^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{(i)} \\ q^{(i)} \end{bmatrix} - \underline{J}^{-1}(p^{(i)}, q^{(i)}) \begin{bmatrix} c(p^{(i)}, q^{(i)}) \\ d(p^{(i)}, q^{(i)}) \end{bmatrix} \quad (\text{F12-3.})$$

Itt a felső index az iteráció sorszámára utal, \underline{J} pedig a Jacobi-mátrix:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial p} & \frac{\partial c}{\partial q} \\ \frac{\partial d}{\partial p} & \frac{\partial d}{\partial q} \end{bmatrix} \quad (\text{F12-4.})$$

Ez utóbbi elemeit az (F12-1.) összefüggés deriválásából kapjuk. Például a p szerinti derivált:

$$0 = \frac{\partial f(z)}{\partial p} = z\phi(z) + (z^2 + pz + q) \frac{\partial \phi(z)}{\partial p} + z \frac{\partial c}{\partial p} + \frac{\partial d}{\partial p} \quad (\text{F12-5.})$$

A gyökhely környezetében $z^2 + pz + q \approx 0$, így a második tag elhagyható. A többi tagba $z^2 + pz + q$ gyökeit behelyettesítve két egyenletre jutunk, amelyekből $\partial c / \partial p$ és $\partial d / \partial p$ meghatározható.

A módszer eredeti formájában többszörös gyökök kezelésére nem alkalmas. Kétszeres gyökökre kiterjeszthetjük az eljárást, ha a $z^2 + pz + q$ tényező helyett egy $(z-p)^2$ tényezőt keresünk. A megoldó algoritmus hasonló a fent ismertetetthez [C11].

13. Függelék

A Powell-féle optimum-kereső algoritmus

A Powell-algoritmus [C2,C6] az optimum keresés irányainak megválasztására vonatkozó stratégia, amely vonalmenti minimalizálásra a parabola-módszert használja.

A Powell-algoritmus értelmében egy n -dimenziós optimalizálás minden iterációs lépésében $n+1$ vonalmenti optimum-keresésre kerül sor. Ezek közül az első n számú az új keresési irány meghatározására szolgál: ezek rendre az előző n iterációs lépés keresési irányai mentén történnek, s eredő elmozdulásuk iránya adja meg az új keresési irányt. Az iterációs lépés $(n+1)$ -edik vonalmenti optimalizálását aztán ezen új keresési irány mentén végezzük. Az iteráció indításakor a koordináta-irányok szolgálnak "előző"irányokként; ezeket aztán fokozatosan felváltják a fentiek szerint generált új irányok.

A parabola-módszer a függvény csökkenésének irányában lépeget mindaddig, amíg az első növekvő függvény-érték meg nem jelenik. Ekkor az utolsó három pontra másodfoku parabolát illeszt. Ennek mélypontja és az előző három pont közül a két kisebb függvényértékű lesz a következő parabola-illesztés alapja stb.

A Powell-algoritmust feladatunkhoz módosítottuk olyan értelemben, hogy minden új pont generálásakor stabilitás-vizsgálatra kerül sor. Ha az új pont instabil, a legutóbbi lépést sorozatosan felezzük mindaddig, amíg stabil ponthoz jutunk.

IRODALOMJEGYZÉK

A. Könyvek

- A1. Lovass-Nagy Viktor: Mátrixszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
- A2. Bodewig, E.: Matrix Calculus. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959.
- A3. Tou, J. T.: Digital and Sampled-Data Control Systems. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London, 1959.
- A4. Ralston, A.: Bevezetés a numerikus analízisbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- A5. Березин, И. С. и Жидков, Н. П.: Методы вычислений. Наука, Москва, 1966.
- A6. Aström, K. J.: Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, New York, 1967.
- A7. Luenberger, D. G.: Optimization by Vector Space Methods. John Wiley and Sons, Inc. New York, London, Sidney, 1969.
- A8. Jazwinsky, A. H.: Stochastic Processes and Filtering Theory. Mathematics in Science and Engineering 64, Academic Press, New York, 1970.
- A9. Csáki Frigyes: Szabályozások dinamikája. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
- A10. Sage, A. P. and Melsa, J. L.: Estimation Theory with Applications to Communications and Control. McGraw Hill Series in Systems Science, New York, 1971.
- A11. Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.: Linear Optimal Control. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- A12. Kwakernaak, H. and Sivan, R.: Linear Optimal Control Systems. John Wiley and Sons, Inc. New York, London, Sidney, 1972.

- A13. Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai.
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- A14. Lawson, Ch. and Hanson, R. J.: Solving Least Squares Problems. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- A15. Kailath, T. /Ed./: Linear Least-Squares Estimation. Benchmark Papers in Electrical Engineering and Computer Science 17. Dowden, Hutchinson and Ross, Inc. Stroudsburg, Penn., 1977.

B. Saját munkák

- B1. - Digital Filtering - Digital Simulation. Instrument Practice 23, pp.709-713, 1969.
- B2. - Diszkrét rendszerek korrelációs sorozatainak számítása időtartományban. Mérés és Automatika 18 /6/, pp.169-171, 1970.
- B3. - Az állapotter-módszer alkalmazása számítógépes szimulációra és folyamatirányításra. Mérés és Automatika 18 /11/, pp. 385-389, 1970.
- B4. - and Almasy, G.: Balance Calculations through Dynamic System Modelling. IFAC Symposium on Digital Simulation, Győr, 1971.
- B5. - and Almasy, G.: Balance Calculations through Dynamic System Modelling. J. Automatica 9, pp. 79-85, 1973.
- B6. - A Kalman-szűrő. Mérés és Automatika 21 /4/, pp.122-125, 1973.
- B7. - A számítógépes folyamatirányítás apparátusa. I. Modellezés. Kézirat. 1974.
- B8. - A számítógépes folyamatirányítás apparátusa. II. Szűrés. Kézirat. 1974.
- B9. - A számítógépes folyamatirányítás apparátusa. III. Identifikáció. Kézirat. 1974.

- Blo. - The Practical Apparatus of Process Control. Preprints of the 6th Triennial World Congress of IFAC, Boston, USA. Part IVB, pp. 1-8, 1975.
- B11. - Control Theory and Process Control. Szeminárium, Hamburg-i Egyetem, 1975.
- B12. - A New Statistical Filtering Algorithm. Szeminárium. Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, 1977. University of Illinois, Urbana, Ill., 1977. University of Minnesota, Minneapolis, Minn., 1977. Rutgers University, New Brunswick, N.J., 1977. McMaster University, Hamilton, Ont., 1977.
- B13. - Sensitivity of the Dynamic Balancing Filter. Szeminárium. Purdue University, Lafayette, Indiana, 1977.
- B14. - Dynamic Balancing of Measurements - Another Approach to Statistical Filtering. 7th Triennial World Congress of IFAC, Helsinki, 1978. pp. 2167-2174.
- B15. - A Constrained Minimum Variance Input-Output Estimator for Linear Dynamic Systems. J. Automatica 15 /3/ 1979., s.a.

C. Egyéb közvetlen hivatkozások

- C1. Braun Péter: A hálózati modellt tápláló szinkron-generátor feszültség és periódusszabályozója. Diplomaterv, 1962.
- C2. Powell, M.J.D.: An Efficient Method of Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives. The Computer J. 7, pp. 155-162, 1964.
- C3. Almásy, G. et al.: Complex Material and Heat Balance as a Tool of the Computer Control in Continuous Processes. CHIISA Congress, Marianske Lazne, 1969.
- C4. Csáki F.: Some Remarks about Recent Notations in Matrix Analysis. Periodica Polytechnica, Electrical Engineering 15, pp. 157-165, 1971.
- C5. Sztanó, T. and Almasy, G.: Measurement Error Checking in Linear Stochastic Systems. Preprints of the IFAC Stochastic Control Symposium, Budapest, 1974. pp. 59-65.

- C6. Abaffy József: A feltétel nélküli függvényminimalizálás kvadratikus befejezésű módszerei. MTA SZTAKI Tanulmányok 47/1976.
- C7. Sipos Ferenc: A dinamikus mérés kiegyenlítés szimulációs vizsgálata. Diplomaterv, BME, 1976.
- C8. Singh, R. P.: Simulation Study of the Dynamic Balancing Filter. Master of Science thesis, 1978. Department of Systems and Computer Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, USA.
- C9. Simko Pável: Folytonos folyamatok számítógépes irányítása. /A TVA szintézis-reaktor elemzése, szabályozása./ Kandidátusi értekezés, 1979.
- C10. Simko Pável: Az NH_3 szintézis reaktor modellezése. Mérés és Automatika, 1979., s.a.
- C11. Varga Gyula: Kétszeres valós gyökökkel rendelkező valós együtthatós polinomok faktorizálása. Alkalmazott Matematikai Lapok, 1979., s.a.

D. Történelmi jellegű cikkek

- D1. Gauss, C. F.: Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientum. Hamburg, 1809.
- D2. Kolmogorov, A. N.: Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires. C. R. Acad. Sci. 208, pp. 2043-2045, 1939.
- D3. Колмогоров, А. Н.: Стационарные последовательности в гилбертовском пространстве. М. Бюлл. ун-та /А/, 2:6, 1-40, 1941.
- D4. Doob, J. L.: The elementary Gaussian processes. Ann. Math. Statist. 15, pp. 229-282, 1944.
- D5. Крейн, М. Г.: Об одном обобщении исследований Г. Сегеő, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова. ДАН 46, 95-98, 1945.

- D6. Креин, М.Г.: Об одной экстраполяционной проблеме А.Н. Колмогорова. ДАН 46, 339-342, 1945.
- D7. Wiener, N.: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications. Technology Press and Wiley, New York, 1949.
- D8. Franklin, G. F.: The Optimum Synthesis of Sampled-Data Systems. Electron Res. Lab., Columbia University, New York, Tech. Rep. T-6/B, May 1955.
- D9. Friedland, B.: Least-Squares Filtering and Prediction of Non-Stationary Sampled-Data. Inform. Control 1, pp. 297-313, 1958.
- D10. Blum, M.: Recursion Formulas for Growing Memory Digital Filters. IRE Trans. Inform. Theory IT-4, pp. 24-30, March 1958.
- D11. Swerling, P.: First-Order Error Propagation in a Stage-wise Smoothing Procedure for Satellite Observations. J. Astronaut. Sci. 6, pp. 46-52, 1959.
- D12. Kalman, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Transactions of the ASME, J. of Basic Engineering 82, pp. 35-45, 1960.
- D13. Kalman, R. E. and Bucy, R. S.: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Transactions of the ASME, J. of Basic Engineering 83, pp. 95-108, 1961.
- D14. Blum, M.: A Stagewise Parameter Estimation Procedure for Correlated Data. Numer. Math. 3, pp. 202-208, 1961.
- D15. Kailath, T.: A View of Three Decades of Linear Filtering Theory. IEEE Transactions on Information Theory IT-20, pp. 146-181, 1974.

E. Kalman szűrő

- E1. Kalman, R. E.: New Methods of Wiener Filtering Theory. Proc. 1st Symp. Engineering Applications of Random Function Theory and Probability /Eds.: Bogdanoff, J.L. and Kozin, F./ John Wiley and Sons, Inc. New York, London, Sidney, 1963., pp. 270-388.
- E2. Cox, H.: On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic Systems. IEEE Transactions on Automatic Control AC-9, pp. 5-12, 1964.
- E3. Rosenbrock, H. H.: On the Connection between Discrete Linear Filters and Some Formulae of Gauss. Act. Congr. Automatique Théorique, Dunod, Paris, 1965.
- E4. Kailath, T.: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation. Part I.: Linear Filtering in Additive White Noise. IEEE Transactions on Automatic Control AC-13, pp. 646-655, 1968.
- E5. Moore, J. B. and Anderson, B.D.O.: Extensions of Quadratic Minimization Theory, I. Int. J. Control 7, pp. 465-472, 1968.
- E6. Nahi, N. E.: Optimum Recursive Estimation with Uncertain Observation. IEEE Transactions on Information Theory IT-15, pp. 457-462, 1969.
- E7. Bucy, R. S.: Linear and Nonlinear Filtering. Proc. IEEE 58, pp. 854-864, 1970.
- E8. Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.: The Kalman-Bucy Filter as a True Time-Varying Wiener Filter. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC-1, pp. 119-128, 1971.
- E9. Kailath, T. and Geesey, R. A.: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation. Part IV.: Recursive Estimation Given Lumped Covariance Functions. IEEE Transactions on Automatic Control AC-16, pp. 720-727, 1971.

- E10. Swerling, P.: Modern State Estimation Methods from the Viewpoint of the Method of Least-Squares. IEEE Transactions on Automatic Control AC-16, pp. 707-719, 1971.
- E11. Balakrishnan, A. V.: System Theory and Stochastic Optimization. Proc. NATO 1972 Advanced Study Institute on Network and Signal Theory. Bournemouth, England, 1972.
- E12. Kailath, T.: A Note on Least-Squares Estimation by the Innovations Method. J. SIAM Control 10, pp. 477-486, 1972.
- E13. Kailath, T. and Geesey, R.: An Innovation Approach to Least-Squares Estimation. Part V.: Innovation representations and Recursive Estimation in Colored Noise. IEEE Transactions on Automatic Control AC-18, pp. 435-453, 1973.
- E14. Gevers, M. and Kailath, T.: An Innovation Approach to Least-Squares Estimation. Part VI.: Discrete-Time Innovation Representations and Recursive Estimation. IEEE Transactions on Automatic Control AC-18, pp. 588-600, 1973.
- E15. Kailath, T.: Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant Linear Systems. IEEE Transactions on Information Theory IT-19, pp. 750-760, 1973.
- E16. Morf, M., Sidhu, G. S. and Kailath, T.: Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant Linear Discrete-Time Systems. IEEE Transactions on Automatic Control AC-19, pp. 315-323, 1974.
- E17. Ljung, L. and Kailath, T.: A Unified Approach to Smoothing Formulas. J. Automatica 12, pp. 147-157, 1976.
- E18. Brewer, H. W. and Leondes, C. T.: A Treatment of Nonwhite Measurement Noise in Discrete Linear Systems. J. Automatica 12, pp. 371-374, 1976.
- E19. Bierman, G. J.: Measurement Updating Using the U-D Factorization. J. Automatica 12, pp. 375-382, 1976.

F. Érzékenység

- F1. Dorato, P.: On Sensitivity in Optimal Control Systems. IEEE Transactions on Automatic Control AC-8, pp. 256-257, 1963.
- F2. Pagurek, B.: Sensitivity of the Performance of Optimal Control Systems to Plant Parameter Variations. IEEE Transactions on Automatic Control AC-10, pp. 178-180, 1965.
- F3. Siljak, D. D. and Dorf, R. C.: On the Minimization of Sensitivity in Optimal Control Systems. Proc. 3rd Allerton Conf. on Circuit and Systems Theory, pp. 225-229, 1965.
- F4. Ho, B. L.: Sensitivity of the Kalman-Filter with Respect to Parameter Variations. Stanford Research Institute, March 1968, Memo.33.
- F5. Griffin, R. E. and Sage, A. P.: Large and Small Scale Sensitivity Analysis of Optimum Estimation Algorithms. IEEE Transactions on Automatic Control AC-13, pp. 320-329, 1968.
- F6. Griffin, R. E. and Sage, A. P.: Sensitivity Analysis of Discrete Filtering and Smoothing Algorithms. AIAA J1 7, 1969.
- F7. Brown, R. J. and Sage, A. P.: Analysis of Modelling and Bias Errors in Discrete-Time Estimation. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems AES-7, pp. 340-354, 1971.
- F8. Warren, A. W.: Bias and Covariance Formula for Filter Error Analysis and Model Sensitivity. Proc. 1973 Joint Automatic Control Conf., Columbus, Ohio.
- F9. Aasnaes, H. and Kailath, T.: Initial Condition Robustness of Linear-Least-Squares Filtering Algorithms. IEEE Transactions on Automatic Control AC-19, pp. 393-397, 1974.
- F10. Leondes, C. T. and Pearson, J. O. : Suboptimal Estimation of Systems with Large Parameter Uncertainties. Automatica 10, pp. 413-424, 1974.

- F11. Asher, R. A. and Reeves, R. M.: Performance Evaluation of Suboptimal Filters. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems AES-11, pp. 400-405, 1975.
- F12. Chung, R. C. and Bélanger, P. R.: Minimum-Sensitivity Filter for Linear Time-Invariant Stochastic Systems with Uncertain Parameters. IEEE Transactions on Automatic Control AC-21, pp. 98-100, 1976.
- F13. Nahi, N. E. and Knobbe, E. J.: Optimal Linear Recursive Estimation with Uncertain System Parameters. IEEE Transactions on Automatic Control AC-21, pp. 263-266, 1976.
- F14. Asher, R. B., Herring, K. D. and Ryles, J. C.: Bias, Variance and Estimation Error in Reduced Order Filters. J. Automatica 12, pp. 589-599, 1976.
- F15. Masreliez, C. J. and Martin, R. D.: Robust Bayesian Estimation for the Linear Model and Robustifying the Kalman-Filter. IEEE Transactions on Automatic Control AC-22, pp. 361-371, 1977.

G. Adaptív szűrés, zaj-identifikáció

- G1. Sage, A. P. and Husa, G. W.: Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics. Proc. 1969 Joint Automatic Control Conference, pp. 760-769.
- G2. Mehra, R. K.: On the Identification of Variances and Adaptive Kalman-Filtering. IEEE Transactions on Automatic Control AC-15, pp. 175-184, 1970.
- G3. Carew, B. and Bélanger, P. R.: Identification of Optimum Filter Steady-State Gain for Systems with Unknown Noise Covariances. IEEE Transactions on Automatic Control AC-18, pp. 582-587, 1973.
- G4. Alspach, D. L.: A Parallel Filtering Algorithm for Linear Systems with Unknown Time Varying Noise Statistics. IEEE Transactions on Automatic Control AC-19, pp. 552-556, 1974.

- G5. Godbole, S. S.: Kalman Filtering with No a Priori Information About Noise - White Noise Case: Identification of Covariances. IEEE Transactions on Automatic Control AC-19, pp.561-563, 1974.
- G6. Bélanger, P. R.: Estimation of Noise Covariance Matrices for Linear Time-Varying Stochastic Processes. Automatica 10, pp. 267-275, 1974.
- G7. Myers, K. A. and Tapley, B. D.: Adaptive Sequential Estimation with Unknown Noise Statistics. IEEE Transactions on Automatic Control AC-21, pp.520-523, 1976.

H. Folyamat-identifikáció

- H1. 1st IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems. Prague, 1967. Academia, Prague.
- H2. 2nd IFAC Symposium on Identification and Process Parameter Estimation. Prague, 1970. Academia, Prague.
- H3. 3rd IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Hague, 1973. Elsevier, New York-London-Amsterdam, 1973.
- H4. 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Tbilisi, 1976. North Holland Publ. Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
- H5. Bányász Csilla: Lineáris dinamikus folyamatok identifikációja mintavételezett adatok alapján. Kandidátusi értekezés, 1966.
- H6. Bányász, Cs. and Keviczky, L.: Discrete-Time Identification on Linear Dynamic Process. MTA SZTAKI Tanulmányok 84, 1978.

I. Dinamikus anyagmérleg (Kalman-szűrővel)

- II. Aarna, O.: Dynamic Chemical Plant Model and its Application. Preprints of the 7th Triennial World Congress of IFAC, Helsinki, Finland. Part 1, pp. 279-286, 1978.
- II. Rooney, T. B., Mehra, R. K., Kramerich, G. L. and Evans, L. B.: Estimating Plant Flows and Inventories using Material Balance Relations. Preprints of the 7th Triennial World Congress of IFAC, Helsinki, Finland. Part 1, pp. 423-429, 1978.

A T A N U L M Á N Y O K sorozatban 1978-ban megjelentek:

- 74/1978 Vorträge über das graphische Display GD'71
- 75/1978 Vaskövi István - Gallbavy Márta: Anyagszétválasztási rendszerek tervezésének és optimális üzemeltetésének általános megközelítése
- 76/1978 Somló János - Nagy Judit: Módszer munkadarabok forgácsoló megmunkálási folyamatának optimalizálására
- 77/1978 Szászné Turchányi Piroska: Optimalizálási feladatok csomagkapcsolt számítógéphálózatok tervezésénél
- 78/1978 Darvas Péter - Gallai István - Hosszu Péter - Krammer Gergely: Papers on Computer Graphics
- 79/1978 Dr. Adolf Kotzauer:
Beschriftung und Bemassung von automatisch erstellten Zeichnungen unter Benutzung des graphischen Dialogs
- 80/1978 Studies in Applied Stochastic Programming I.
- 81/1978 Peter Bonitz: Ein Beitrag zur Theorie des Entwurfs doppelt gekrümmter Flächen unter differentialgeometrischen und rechentechnischen Aspekten
- 82/1978 Tankó József: Szabályos job-folyam párok ütemezésének vizsgálata I.
- 83/1978 Tankó József: Szabályos job-folyam párok ütemezésének vizsgálata II.
/Technikai okokból a 82. és a 83. sz. tanulmány 1979-ben jelent meg/
- 84/1978 Bányász Csilla - Keviczky László: Discrete Time Identification of Linear Dynamic Process
- 85/1979 Dr. Hoffmann Péter: Számítógépes szerszámgépvezérlés egy alkatrészprogramozási módszere

- 86/1978 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer kialakításának szempontjai, alkalmazásának és továbbfejlesztésének lehetőségei
- 87/1978 Téli iskola - Operációs rendszerek elmélete

A T A N U L M Á N Y O K sorozatban 1979-ben megjelentek:

- 88/1979 Renner Gábor - Gaál Balázs - Hermann Gyula - Horváth László - Várady Tamás: Szoborszerű felületek tervezése és megmunkálása
- 89/1979 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer /a felhasznált számítástechnikai eszközök, a rendszer szerkezete és programjai/
- 90/1979 Bányász Csilla - Keviczky László: Optimum Insensitivity of the Linear-continuous Transformation
- 91/1979 Téli iskola /Szentendre/
- 92/1979 Andor László: Kisgépes adatbázis kezelő rendszer
- 93/1979 Bolla M., Csáki P., Fischer J., Herodek S., Hoffman Gy., Kutas T., Telegdi L., Wittman I.: A balatoni ökoszisztéma modellezése

